

ABBILDUNGSGRADTHEORIE FÜR EINE KLASSE
MEHRWERTIGER OPERATOREN UND
ASYMPTOTISCHE FIXPUNKTSÄTZE

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereiches Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Bernhard von Guretzky-Cornitz
aus Potsdam

Berlin 1976

1977

ABBILDUNGSGRADTHEORIE FÜR EINE KLASSE
MEHRWERTIGER OPERATOREN UND
ASYMPTOTISCHE FIXPUNKTSÄTZE

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereiches Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Bernhard von Guretzky-Cornitz
aus Potsdam

Berlin 1976



1. Referent: Prof. Dr. H. Pachale
2. Referent: Prof. Dr. G. Preuß

Tag der mündlichen Prüfung: 4. 2. 1977

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	4
§1 Hilfsmittel	7
1.1 Topologische Lineare Räume	7
1.2 Mehrwertige Abbildungen	8
1.3 Approximationssätze	10
1.4 Eigenschaften des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$	12
§2 Ein Abbildungsgrad für komponierbare Operatoren im $\mathbb{R}^n$	15
2.1 Ein Approximationssatz	15
2.2 Definition des Abbildungsgrades	19
§3 Der Abbildungsgrad in lokalkonvexen Räumen	29
3.1 Definition und Eigenschaften des Abbildungsgrades	29
3.2 Beziehungen zu anderen Abbildungsgradkonzepten	36
§4 Fixpunkt- und Abbildungssätze	40
§5 Produkteigenschaften des Abbildungsgrades	49
§6 Asymptotische Fixpunktsätze	61
Anhang I	69
Anhang II	70
Literaturverzeichnis	72

EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das Fixpunktverhalten mehrwertiger Operatoren. Von besonderem Interesse sind dabei die oberhalbstetigen Operatoren, deren Bilder abgeschlossene und konvexe Mengen in lokalkonvexen Räumen sind; denn aufgrund eines Ergebnisses von E. Michael [40] lassen sich die wesentlichen Eigenschaften von stetigen und unterhalbstetigen mehrwertigen Operatoren aus den entsprechenden Eigenschaften von einwertigen Operatoren ableiten.

Das Studium mehrwertiger oberhalbstetiger Abbildungen geht auf J.v. Neumann [42] zurück, der sie in seinen spieltheoretischen Arbeiten untersuchte. S. Kakutani [34] und einige Jahre später Bohnenblust/Karlin [4] und Ky Fan [18] übertrugen dann die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder auf mehrwertige Operatoren und bewiesen mit deren Hilfe u.a. Min-Max-Theoreme. Weitere Anwendungen in der Spieltheorie findet man bei Dresher/Karlin [13] und bei C. Berge [3]. In jüngster Zeit findet die mehrwertige Fixpunkttheorie besonders in der Theorie der Differential- und Integralgleichungen (siehe dazu [6],[17],[24],[31],[33],[37],[45]) sowie in der Kontrolltheorie ([37],[21] und [54]) ihre Anwendung.

Die Idee, topologische Invarianten für mehrwertige Abbildungen zu untersuchen, geht auf Eilenberg/Montgomery [15] zurück. Mit Hilfe eines klassischen Abbildungssatzes von L. Vietoris (Nr.5 in [53]) und der von ihm stammenden Idee eine Abbildung F zu zerlegen in $F = q \circ p^{-1}$, hierbei sind p und q die zum Graphen von F gehörenden Projektionen, und dadurch eine Darstellung der induzierten Endomorphismen von F in der Čech'schen Homologie zu erhalten, definierten die Autoren die Lefschetz-Zahl für oberhalbstetige Abbildungen mit abgeschlossenen und azyklischen Bildern auf kompakten metrischen ANR's und bewiesen den Lefschetz'schen Fixpunktsatz für solche Operatoren. Einige Jahre später wurden weitere topologische Sätze auf mehrwertige Abbildungen übertragen (siehe [28],[29]). In jüngster Zeit sind dabei verschiedene Verallgemeinerungen

bewiesen worden, sowohl was die Klasse der Abbildungen als auch deren Definitionsbereich betrifft. Hier sind insbesondere die Arbeiten von L. Górniewicz [25], M. Powers [49], C.C. Fenske/H.O. Peitgen [19] und B. Calvert [8] zu nennen.

Ein anderer Zugang zur Definition eines topologischen Grades für mehrwertige kompakte und oberhalbstetige Operatoren mit abgeschlossenen und konvexen Bildern, die auf separierten lokalkonvexen Räumen definiert sind und der gänzlich ohne Hilfsmittel aus der algebraischen Topologie auskommt, ist wohl zuerst von M. Hukuhara in [32] angegeben worden. In [10] benutzen A. Cellina und A. Lasota eine ähnliche Methode zur Definition eines Grades in normierten Räumen. T.W. Ma hat in [38] eine Abbildungsgrad- und Fixpunkttheorie für mehrwertige kompakte Vektorfelder in lokalkonvexen Räumen angegeben, wobei er im wesentlichen die in [5] angegebenen Ergebnisse anwendet. Petryshyn/Fitzpatrick haben dann in [47] die in [38] entwickelte Theorie mit Hilfe einfacher Retraktionsschlüsse auf gewisse nicht-kompakte Operatoren in normierten Räumen übertragen; dabei handelt es sich um Abbildungen, die teilweise auf kompakten Mengen definiert sind. Unabhängig davon wurden in [44] etwas allgemeinere Ergebnisse bewiesen.

Ein völlig neuer Zugang zur Abbildungsgradtheorie ist von Lasry/Robert in [37] vorgelegt worden. Die Konstruktion dieser Autoren hängt allerdings wesentlich an der Gültigkeit des Satzes von Hahn-Banach und ist daher auf die von V.L. Klee [35] eingeführten zulässigen topologischen Vektorräume nicht übertragbar (siehe dazu auch [30] und Teil II des Anhangs).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einige wichtige Eigenschaften auch für den Abbildungsgrad von mehrwertigen Operatoren zu beweisen, die bisher aus der vorliegenden Theorie aus prinzipiellen Gründen nicht ableitbar waren. Dazu wird das Abbildungsgradkonzept auf die Klasse der "komponierbaren" Operatoren übertragen. Diese Operatoren bestehen aus endlich vielen Kompositionen kompakter oberhalbstetiger Abbildungen, deren Bilder abgeschlossene und konvexe Teilmengen separierter lokalkonvexer Räume sind. Ähnliche

Begriffsbildungen findet man in [8] und [49]. Eine Abbildungsgradtheorie für eine Klasse solcher Operatoren ist aus folgenden Gründen von Interesse : Es lassen sich erstens allgemeinere Fixpunktprobleme untersuchen; zweitens kann man Produkt- und Kommutativitätssätze beweisen und erhält drittens damit einen analytischen Zugang zur asymptotischen Fixpunkttheorie, wie sie etwa im einwertigen Fall in [43] und [52] zu finden ist.

Der §1 hat einführenden Charakter, dort werden die wichtigsten Hilfsmittel zusammengestellt und die Terminologie festgelegt.

In §2 verallgemeinern wir ein Ergebnis von Hukuhara und benutzen es zur Einführung des Abbildungsgrades für komponentierbare Operatoren im R^n .

In §3 wird die endlichdimensionale Theorie auf lokalkonvexe Räume übertragen und ein Zusammenhang zu den bisherigen Abbildungsgradkonzepten hergestellt.

In §4 werden Fixpunkt- und Abbildungssätze bewiesen.

Die Produktsätze für den Abbildungsgrad werden in §5 auf mehrwertige Operatoren übertragen und mit deren Hilfe neue Fixpunktsätze bewiesen.

In §6 wird schließlich das mod-p-Theorem von Steinlein - Krasnosel'skij/Sabreiko mehrwertig formuliert und bewiesen.

Ein Überblick über verschiedene Verallgemeinerungsmöglichkeiten wird im Anhang gegeben.

§1 HILFSMITTEL

In diesem Abschnitt klären wir die Terminologie für mehrwertige Abbildungen und stellen einige bekannte Sätze zusammen, auf die wir an späterer Stelle Bezug nehmen werden.

1.1 Topologische lineare Räume

(1.1) Definition: Es sei E ein reeller linearer Raum und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf E .

Das Paar $(E, \mathcal{T})$ heißt topologischer linearer Raum, wenn die Abbildungen $(x, y) \mapsto x + y$ und $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ von $E \times E$ in E bzw. von $\mathbb{R} \times E$ in E stetig bezüglich $\mathcal{T}$ sind.

$(E, \mathcal{T})$ heißt lokalconvex, wenn E eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt.

$(E, \mathcal{T})$ heißt separiert, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ dem T_2 -Axiom genügt. Mit LCTVS bezeichnen wir die Klasse der lokalconvexen separierten topologischen linearen Räume.

Für Teilmengen $A \subset E$ verabreden wir folgende Bezeichnungen: A^- , A° bezeichnen die abgeschlossene Hülle bzw. den offenen Kern von A bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ auf E . Mit $\partial A = A^- \setminus A$ bezeichnen wir den Rand von A , mit $\text{co}A$ bzw. $\bar{\text{co}}A$ die konvexe bzw. abgeschlossene konvexe Hülle von A .

Sei E ein metrisierbarer LCTVS und $d(\cdot, \cdot)$ eine die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugende Metrik. Den Abstand $\text{dist}(x, A)$ zwischen einem Element x aus E und einer Teilmenge A definieren wir durch:

$$\text{dist}(x, A) = \inf \{ d(x, y); y \in A \}.$$

Ist A eine nichtleere und kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ so wird die δ -Umgebung von A definiert durch:

$$O_\delta(A) = \{ x; x \in \mathbb{R}^n, \text{dist}(x, A) < \delta \}, \quad (\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}).$$

Durch $\text{dist}(A, B) = \inf \{ \delta; \delta > 0, A \subset O_\delta(B), B \subset O_\delta(A) \}$ wird der Abstand zweier kompakter nichtleerer Teilmengen A, B des $\mathbb{R}^n$ definiert. Bezeichnen wir mit $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der nichtleeren und kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so prüft man leicht nach, daß $(\text{Comp}(\mathbb{R}^n), \text{dist})$ ein vollständiger metrischer

Raum ist. Eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ heißt dann konvergent, wenn gilt:

$$\lim(\text{dist}(A_k, A))_{k \in \mathbb{N}} = 0 \quad .$$

1.2 Mehrwertige Abbildungen

Die Beweise der folgenden Tatsachen über mengenwertige Funktionen findet man etwa in der Monographie von Berge [2], in [32] oder [50].

(1.2) Definition: Seien E und E' LCTVS und F eine Abbildung von E in $\text{Comp}(E')$. Dann heißt F in einem Punkt $x_0 \in E$

(i) oberhalbstetig, wenn es zu jeder offenen Menge V mit $F(x_0) \subset V$ eine offene Umgebung W von x_0 in E gibt mit: $F(W) \subset V$. Dabei ist $F(W) = \bigcup_{x \in W} F(x)$.

(ii) unterhalbstetig, wenn es zu jeder offenen Menge V mit $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ eine offene Umgebung W von x_0 in E gibt mit: $x \in W \implies F(x) \cap V \neq \emptyset$.

(iii) stetig, wenn F in x_0 sowohl unterhalbstetig als auch oberhalbstetig ist.

Anstelle von oberhalbstetig bzw. unterhalbstetig schreiben wir künftig ohs und uhs .

Ist F in jedem Punkt $x \in E$ ohs, uhs oder stetig, so heißt F ohs, uhs bzw. stetig auf E . Ist F insbesondere eine einwertige Abbildung, so fallen alle drei Stetigkeitsbegriffe zusammen.

Bei mehrwertigen Abbildungen unterscheidet man zwei Inverse:

Das große Urbild ist definiert durch:

$$F^-(B) = \{x; x \in E, F(x) \cap B \neq \emptyset\} \quad \text{bzw.} \\ F^-(y) = \{x; x \in E, y \in F(x)\} \quad .$$

Das kleine Urbild ist definiert durch:

$$F^+(B) = \{x; x \in E, F(x) \subset B\} \quad \text{bzw.} \\ F^+(y) = \{x; x \in E, y = F(x)\} \quad .$$

$F^+(B)$ ist stets in $F^-(B)$ enthalten; stimmen beide Mengen überein, so heißt B einfach. Ist F einwertig so fallen beide Urbilder zusammen.

Eine mehrwertige Abbildung heißt injektiv , wenn gilt:

$$x \neq x' \implies F(x) \cap F(x') = \emptyset .$$

Das große Urbild dient u.a. zur Charakterisierung injektiver Abbildungen.

(1.3) Satz: Eine mehrwertige Abbildung ist genau dann injektiv, wenn F^- einwertig ist, d.h. für alle $y \in F(E)$ ist die Menge $F^-(y)$ einelementig.

(1.4) Satz: (i) Die Abbildung $F: E \longrightarrow \text{Comp}(E')$ ist genau dann ohs, wenn für jede offene (abgeschlossene) Menge A in E' die Menge $F^+(A)$ offen in E ($F^-(A)$ abgeschlossen in E) ist.

(ii) F ist genau dann uhs, wenn für jede offene (abgeschlossene) Menge A in E' die Menge $F^-(A)$ offen in E ($F^+(A)$ abgeschlossen in E) ist.

Betrachten wir eine Folge von Mengen A_k im Raum $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren den Limes inferior und superior durch:

$$\underline{\lim}(A_k) = \{ x; \lim(\text{dist}(x, A_k)) = 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \} ,$$

$$\overline{\lim}(A_k) = \{ x; \underline{\lim}(\text{dist}(x, A_k)) = 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \} .$$

Eigenschaften ohs Abbildungen nennt folgender

(1.5) Satz: Seien E, E' LCTVS und $F: E \longrightarrow \text{Comp}(E')$ ohs, dann gelten:

(i) Ist $K \subset E$ kompakt, so ist auch $F(K)$ kompakt.

(ii) Der Graph von F

$$\text{gr}(F) = \{ (x, y); x \in E, y \in E' \text{ und } y \in F(x) \}$$

ist abgeschlossen in $E \times E'$.

(iii) Ist (x_n) eine gegen x_0 konvergente Folge in E und (y_n) eine gegen y_0 konvergente Folge in E' mit $y_n \in F(x_n)$, so ist $y_0 \in F(x_0)$.

(iv) Sind E und E' endlichdimensional und ist (x_n) eine gegen x_0 konvergente Folge in E , so gilt:

$$\overline{\lim}(F(x_n)) \subset F(x_0) .$$

Mehrwertige Abbildungen, die der Eigenschaft (iii) genügen, heißen abgeschlossen ; ist $F(E)$ in einer kompakten Teilmenge von E' enthalten, so ist die Abgeschlossenheit quivalent zur Oberhalbstetigkeit.

(1.6) Satz: Eine Abbildung $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^m)$ ist genau dann stetig, wenn sie, aufgefaßt als einwertige Abbildung, stetig ist bezüglich der durch dist induzierten Topologie.

Die Metrik dist wird i.A. als HAUSDORFF-Metrik bezeichnet, stetige Abbildungen im Sinne von (1.6) werden daher manchmal auch HAUSDORFF-stetig genannt. Da für kompaktes K $\text{Comp}(K)$ wieder kompakt ist, folgt aus (1.6), daß $\mathbb{F}_K$ gleichmäßig stetig ist.

(1.7) Satz: Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $O_{\mathcal{F}}$ ist eine stetige Abbildung von $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ in sich.
- (ii) Die Komplexaddition $+: \text{Comp}(E)^2 \longrightarrow \text{Comp}(E)$ ist stetig.
- (iii) Die Skalarmultiplikation $\cdot: \mathbb{R} \times \text{Comp}(E) \longrightarrow \text{Comp}(E)$ ist stetig.
- (iv) Bezeichnen wir mit $\text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der nichtleeren kompakten und konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so ist der Durchschnitt $\cap: \text{Conv}(\mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung in (A, B) , falls $A \cap B$ innere Punkte enthält.
- (v) Sind $F: E \longrightarrow \text{Comp}(E')$ und $G: E' \longrightarrow \text{Comp}(E'')$ stetig, so ist auch die durch

$$G \circ F(x) = G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y)$$

definierte Abbildung $G \circ F: E \longrightarrow \text{Comp}(E'')$ stetig.

Die Aussage (v) gilt insbesondere auch für ohs und uhs Abbildungen.

1.3 Approximationssätze

Von den folgenden Theoremen, die Beziehungen zwischen ein- und mehrwertigen Abbildungen herstellen, werden wir im weiteren ausgiebig Gebrauch machen. Die folgende Nummer zeigt, daß uhs Abbildungen mit kompakten und konvexen Bildern in der Fixpunkttheorie nicht von Interesse sind.

(1.8) Theorem: (Michael [40]) Sei E ein metrisierbarer LCTVS und E' ein separabler Fréchet-Raum. Ist dann $F:E \longrightarrow \text{Conv}(E')$ uhs, so besitzt F eine stetige Selektion, d.h. es existiert eine stetige Funktion $f:E \longrightarrow E'$ mit: $f(x) \in F(x)$, für alle x aus E .

(1.9) Theorem: (Hukuhara [32]) Sei A eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $F:A \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$ uhs. Dann existiert eine monoton fallende Folge (G_k) stetiger Abbildungen von A in $\text{Conv}(\mathbb{R}^m)$ mit:

(i) $F(x) \subset G_k(x)^0$, $\forall x \in A$, $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ und zu jedem $x \in A$ existiert ein $a \in A$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit:

$$\|x - a\| < \delta, \quad G_k(x) \subset O_\varepsilon(F(a))^-.$$

Aus (ii) ergibt sich insbesondere, daß die G_k gegen F konvergieren, man findet also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $f:A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit: $f(x) \in O_\varepsilon(F(x))$, $\forall x \in A$.

Eine mehrwertige Abbildung $F:A \longrightarrow E'$ heißt kompakt, wenn $F(A)$ relativ kompakt ist; F heißt endlichdimensional, wenn $F(A)$ in einem endlichdimensionalen Teilraum E'_n von E' enthalten ist. Ist $F:A \longrightarrow \text{Comp}(E)$ kompakt und uhs und bezeichnet id die Identität auf A , so heißt die uhs Abbildung $f = \text{id} - F$ das zu F gehörende kompakte Vektorfeld.

(1.10) Theorem: (Hukuhara [32]; Ma [38]) Sei E ein LCTVS und $A \subset E$, dann gelten:

(i) Ist $f:A \longrightarrow \text{Comp}(E)$ ein kompaktes Vektorfeld, so ist f abgeschlossen, d.h. f überführt abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen.

(ii) Ist $f:A \longrightarrow \text{Conv}(E)$ ein injektives kompaktes Vektorfeld, so ist f offen, überführt also offene Mengen in offene Mengen.

Die Methode der endlichdimensionalen Approximation mit Hilfe der SCHAUDER-Projektionen ist von Nagumo [41] auf lokalkonvexe separierte Räume übertragen worden:

(1.11) Theorem: Sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge eines LCTVS E . Dann existiert zu jeder Nullumgebung $V \subset E$ ein endlichdimensionaler Teilraum $E_n \subset E$ und eine stetige Funktion $p_V: K \longrightarrow E_n$ mit:

$$p_V(x) - x \in V, \text{ für alle } x \text{ aus } K.$$

Aus (1.11) folgt sofort:

(1.12) Korollar: (Ma [38]) Sei M ein Hausdorff-Raum, E ein LCTVS und $F: M \longrightarrow \text{Conv}(E)$ kompakt und ohs. Dann existiert zu jeder (ohne Einschränkung konvexen) Nullumgebung $V \subset E$ eine endlichdimensionale, kompakte und ohs Abbildung $G_V: M \longrightarrow \text{Conv}(E)$ mit:

$$\begin{aligned} G_V(x) &\subset F(x) + V & \text{und} \\ F(x) &\subset G_V(x) + V & , \quad \text{für alle } x \text{ aus } M. \end{aligned}$$

Die Approximation G_V kann direkt angegeben werden:

$$G_V(x) = \text{co}(p_V \circ F(x)) \quad \forall x \in M.$$

Dabei ist p_V die gemäß (1.11) existierende Projektion. Da $p_V \circ F(x)$ in einem endlichdimensionalen Raum liegt, ist $\text{co}(p_V \circ F(x))$ wieder kompakt (Th. 11, [16]).

Nach Klee [35] heißt ein separierter linearer Raum E zulässig, wenn die Konklusion von (1.11) für E wahr ist. Bekanntlich gibt es zulässige Räume, die nicht lokalkonvex sind ([17], [30]). Hingegen ist die Frage, ob es überhaupt separierte lineare Räume gibt, die nicht zulässig sind, noch offen.

1.4 Eigenschaften des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$

Diesen Paragraphen abschließend stellen wir die wesentlichen Eigenschaften des klassischen Abbildungsgrades von Brouwer zusammen. Die Beweise findet man z.B. in [11], [27], [41], [52a], [36a] und [55].

Sei A eine nichtleere, offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, und für einen festen Punkt p gelte: $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial A)$. Mit $\deg(f, A, p)$ bezeichnen wir den Brouwerschen Abbildungsgrad. Es gelten die folgenden Beziehungen:

- (1.13) Normalisierung: Ist $f: A \longrightarrow A$ die Identität, so ist $\deg(f, A, p) = 1$, falls $p \in A$. Anderenfalls ist $\deg(f, A, p) = 0$.
- (1.14) Aus $\deg(f, A, p) \neq 0$ folgt $f^{-1}(p) \neq \emptyset$.
- (1.15) Reduktion: Ist $A \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$ für ein $m < n$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $p \notin (id - f)(\partial A)$, so ist $\deg(id - f, A, p) = \deg((id - f)|_{A \cap \mathbb{R}^m}, A \cap \mathbb{R}^m, p)$.
- (1.16) Homotopieinvarianz: Ist $h: [0, 1] \times A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $p \notin h(t, \partial A)$, für alle $t \in [0, 1]$, so ist auf $[0, 1]$ $\deg(h(t, \cdot), A, p)$ konstant.
- (1.17) Summeneigenschaft: Ist $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $p \notin \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n f(\partial A_i)$, so ist:

$$\deg(f, A, p) = \sum_{i=1}^n \deg(f, A_i, p).$$
- (1.18) Sei $g(x) = f(x) - p$, für alle $x \in A$. Dann ist $0 \notin g(\partial A)$ und $\deg(f, A, p) = \deg(g, A, 0)$.
- (1.19) Seien A_1, A_2 offene und beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^m$, $f_1: A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2: A_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen mit $p_i \notin f_i(\partial A_i)$. Setzt man $A = A_1 \times A_2$, $p = (p_1, p_2)$ und $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, so gilt: $\deg(f, A, p) = \deg(f_1, A_1, p_1) \cdot \deg(f_2, A_2, p_2)$.
- (1.20) Produkteigenschaft: Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: A \longrightarrow B^0$, $g: B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Bezeichnen $(K_i)_{i \in I}$ die Zusammenhangskomponenten von $B \setminus f(\partial A)$ und sind b_i beliebige Punkte in K_i , so gilt für $p \in \mathbb{R}^n \setminus (g \circ f(\partial A) \cup g(\partial B))$:

$$\deg(g \circ f, A^0, p) = \sum_{i \in I} \deg(g|_{K_i}, K_i, p) \cdot \deg(f, A, b_i).$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}(g \circ f)$ resp. $\mathcal{F}(f \circ g)$ die Fixpunktmenge der Abbildungen $g \circ f$ resp. $f \circ g$.

(1.21) Kommutativitätseigenschaft: Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ nichtleere offene und beschränkte Mengen, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und es gelte:

$$f(\mathcal{F}(g \circ f|_A)) \subset B, \quad g(\mathcal{F}(f \circ g|_B)) \subset A, \quad \text{dann ist:}$$

$$\deg(\text{id} - f \circ g, B, 0) = \deg(\text{id} - g \circ f, A, 0).$$

§2 EIN ABBILDUNGSGRAD FÜR KOMPONIERBARE OPERATOREN IM $\mathbb{R}^n$

Um Trivalitäten auszuschließen, setzen wir im Folgenden stets voraus, daß die Definitionsbereiche der zu betrachtenden Abbildungen nichtleeres Inneres haben.

2.1 Ein Approximationssatz

Die folgende Begriffsbildung geht - in etwas anderer Form - auf Powers [49] zurück.

(2.1) Definition: Für $i = 1, \dots, n$ seien E_i LCTVS und U_i abgeschlossene Teilmengen von E_i , ferner sei $E_1 = E_{n+1}$. Eine Familie oberhalbstetiger Abbildungen $F_i: U_i \longrightarrow \text{Conv}(E_{i+1})$ heißt komponierbar bezüglich p ($p \in E_1$), wenn gelten:

- (i) $F_i(U_i)^- \subset U_{i+1}^0$, für $i=1, \dots, n-1$.
- (ii) $p \notin (\text{id} - F_n \circ \dots \circ F_1)(\partial U_1)$.

Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir im Folgenden stets den Fall $n = 2$; die Allgemeinheit wird dadurch nicht eingeschränkt, da sich alle weiteren Überlegungen mutatis mutandis auf den Fall $n > 2$ übertragen lassen.

Wir benötigen zunächst zwei Lemmata.

(2.2) Lemma: Sind $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und F_1, F_2 komponierbar bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$, so existiert ein $\delta > 0$ mit: $\{x\} \cap O_\delta(F_2 \circ F_1(x)) = \emptyset$, für alle $x \in U_1$.

Beweis: Wir setzen $\delta(x) = \text{dist}(x, F_2 \circ F_1(x))$. Da F_2, F_1 bezüglich 0 komponierbar sind, ist für alle $x \in \partial U_1$ $\delta(x) > 0$. Wir nehmen an, es ist $\inf_{x \in \partial U_1} \delta(x) = 0$. Dann existiert eine Folge (x_k) aus ∂U_1 mit $\lim(x_k) = x_0$ und $\lim(\delta(x_k)) = 0$, d.h. aber:

$$\lim(\text{dist}(x_n, F_2 \circ F_1(x_n))) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\lim(\inf\{d(x_n, y); y \in F_2 \circ F_1(x_n)\}) = 0.$$

Wegen $\text{dist}(x_0, y) \leq \text{dist}(x_0, x_n) + \text{dist}(x_n, y)$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \lim(\inf\{\text{dist}(x_0, y); y \in F_2 \circ F_1(x_n)\}) &\geq \\ \lim(\inf\{\text{dist}(x_n, y); y \in F_2 \circ F_1(x_n)\}) + \lim(\text{dist}(x_0, x_n)) \\ \implies \lim(\text{dist}(x_0, F_2 \circ F_1(x_n))) &= 0. \\ \implies x_0 \in \overline{\lim}(F_2 \circ F_1(x_n)) &. \end{aligned}$$

Da $F_2 \circ F_1$ ohs ist, folgt aus (1.5):

$$\overline{\lim}(F_2 \circ F_1(x_n)) \subset F_2 \circ F_1(x_0)$$

$$\implies x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0) \quad , \quad \text{was aber im Widerspruch}$$

dazu steht, daß $F_2 \circ F_1$ keine Fixpunkte auf dem Rande von U_1 hat. q.e.d.

Sind die F_1 einwertig, siehe [27], Lemma 4.2 .

(2.3) Lemma: Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $F_1: U_1 \rightarrow \text{Comp}(U_2)$, $F_2: U_2 \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ ohs mit:

$$F_2^-(x) \cap F_1(x) = \emptyset, \quad \text{für } x \in \partial U_1.$$

Dann existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$F_2^-(x) \cap O_\delta(F_1(x)) = \emptyset, \quad \text{für alle } x \in \partial U_1.$$

Beweis: Ist $F_2^-(x) = \emptyset$ für alle $x \in \partial U_1$, so sind wir fertig. Anderenfalls können wir wegen der Abgeschlossenheit von $F_2^-(x)$ setzen: $\delta(x) := \text{dist}(F_2^-(x), F_1(x)) > 0$, $\forall x \in \partial U_1$.

Angenommen es ist $\inf_{x \in \partial U_1} \delta(x) = 0$, dann existiert eine gegen x_0 konvergente Folge (x_n) in ∂U_1 mit $\lim \delta(x_n) = 0$. Da $F_2^-(x_n)$ kompakt ist, gibt es $y_n \in F_2^-(x_n)$ bzw. $x_n \in F_2(y_n)$ mit:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim(\delta(x_n)) = \lim(\text{dist}(F_2^-(x_n), F_1(x_n))) \\ &= \lim(\text{dist}(y_n, F_1(x_n))). \end{aligned}$$

Da U_2 kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß (y_n) gegen ein y_0 aus U_2 konvergiert. Aus der Dreiecksungleichung

$$\text{dist}(y_0, F_1(x_n)) \leq \text{dist}(y_0, y_n) + \text{dist}(y_n, F_1(x_n))$$

folgt dann:

$$0 \leq \lim(\text{dist}(y_0, F_1(x_n))) \leq \lim(\text{dist}(y_n, F_1(x_n))) = 0$$

$$\implies y_0 \in \overline{\lim}(F_1(x_n)) \subset F_1(x_0).$$

Die letzte Inklusion folgt aus (1.5). Insgesamt haben wir also: $x_n \longrightarrow x_0$, $y_n \longrightarrow y_0$ und $x_n \in F_2(y_n)$. Die Abgeschlossenheit von F_2 liefert dann: $x_0 \in F_2(y_0) \subset F_2 \circ F_1(x_0)$, was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht. q.e.d.

Im folgenden Theorem übertragen wir (1.9) auf komponierbare Abbildungen.

(2.4) Theorem: Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und die Abbildungen $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$, $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ seien bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ komponierbar. Dann existieren zu jedem $\delta > 0$ stetige Abbildungen $G_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ und $G_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$ mit:

- (i) G_1 und G_2 sind bezüglich 0 komponierbar.
- (ii) $G_2 \circ G_1(x) \subset O_{2\delta}(F_2 \circ F_1(x))$, für alle $x \in U_1$.
- (iii) $F_2 \circ F_1(x) \subset G_2 \circ G_1(x)$, für alle $x \in U_1$.

Beweis: Da F_1 und F_2 komponierbar sind, ist insbesondere $\{x\} \cap F_2 \circ F_1(x) = \emptyset$, $\forall x \in \partial U_1$. Nach (2.2) existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$\{x\} \cap O_{2\delta}(F_2 \circ F_1(x)) = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1.$$

Zu diesem δ findet man gemäß (1.9) eine stetige Abbildung $G_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ mit $F_2(y) \subset G_2(y)^o$ und $G_2(y) \subset O_\delta(F_2(y))$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_2 \circ F_1(x) &= \bigcup_{y \in F_1(x)} G_2(y) \subset \bigcup_{y \in F_1(x)} O_\delta(F_2(y)) \\ &= O_\delta\left(\bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y)\right) = O_\delta(F_2 \circ F_1(x)). \end{aligned}$$

$$(*) \Rightarrow \{x\} \cap G_2 \circ F_1(x) = \emptyset, \quad \text{für alle } x \in \partial U_1.$$

Um (2.3) anwenden zu können, müssen wir die Beziehung $G_2^-(x) \cap F_1(x) = \emptyset$, $\forall x \in \partial U_1$, nachprüfen. Angenommen sie wäre für ein $x_0 \in \partial U_1$ falsch, so gäbe es ein $y \in U_2$ mit:

$$\begin{aligned} &y \in F_1(x_0) \wedge y \in G_2^-(x_0) \\ \Rightarrow &y \in F_1(x_0) \wedge x_0 \in G_2(y) \\ \Rightarrow &x_0 \in G_2 \circ F_1(x_0), \text{ was wegen } (*) \text{ zum} \end{aligned}$$

Widerspruch führt. Wegen (2.3) gibt es also ein $\delta' > 0$ mit:

$$G_2^-(x) \cap O_{\delta'}(F_1(x)) = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1.$$

Da $F_1(U_1) \subset U_2^0$, findet man ein $\delta'' > 0$ mit $O_{\delta''}(F_1(U_1))^- \subset U_2^0$.

Nach (1.6) ist G_2 gleichmäßig stetig auf U_2 , insbesondere auch gleichmäßig ohs, es gibt also zu δ ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \leq \min\{\delta', \delta''\}$, sodaß für alle $y \in F_1(U_1)$ die Inklusion gilt:

$$G_2(O_{\varepsilon}(y)) \subset O_{\delta}(G_2(y)).$$

Daraus folgt für alle $x \in U_1$:

$$\begin{aligned} G_2(O_{\varepsilon}(F_1(x))) &= G_2(F_1(x) + O_{\varepsilon}(0)) \\ &= \bigcup_{y \in F_1(x)} G_2(y + O_{\varepsilon}(0)) \\ &\subset \bigcup_{y \in F_1(x)} (G_2(y) + O(0)) \\ &= O_{\delta}(G_2 \circ F_1(x)). \end{aligned}$$

Nach (1.9) existiert zu diesem ε eine stetige Abbildung

$G_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$ mit:

$$G_1(U_1) \subset U_2^0, \quad G_1(x) \subset O_{\varepsilon}(F_1(x)) \quad \text{und}$$

$$G_2 \circ G_1(x) \subset G_2(O_{\varepsilon}(F_1(x))) \subset O_{\delta}(G_2 \circ F_1(x)) \subset O_{\delta}(F_2 \circ F_1(x)).$$

Aus der letzten Implikationskette ergibt sich, daß G_1 und G_2 komponierbar bezüglich 0 sind; (iii) ist wegen der Eigenschaften von G_1 und G_2 trivialerweise erfüllt.

q.e.d.

(2.5) Bemerkung: Wie der Beweis gezeigt hat, spielte die Kompaktheit von U_2 beim Nachweis von (ii) die wesentliche Rolle. Hingegen läßt sich auch ohne Ausnutzung der gleichmäßigen Oberhalbstetigkeit ein stetiges G_1 so konstruieren, daß $G_2 \circ G_1$ auf dem Rande von U_1 fixpunktfrei ist. Ist nämlich $\varepsilon = \min\{\delta', \delta''\}$ und wird gemäß (1.9) G_1 zu diesem ε gewählt, so ist

$$G_2^-(x) \cap G_1(x) = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1.$$

Eigenschaft (ii) läßt sich hingegen i.A. nicht nachweisen.

2.2 Definition des Abbildungsgrades

Wir wollen nun einen Abbildungsgrad für komponierbare Abbildungen definieren. Dazu liege die in (2.4) beschriebene Situation vor. Sind G_1 und G_2 stetige Abbildungen mit den Eigenschaften (i) bis (iii), so gibt es nach (1.8) stetige Selektionen $g_1: U_1 \longrightarrow U_2$ und $g_2: U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Da $G_1(x)$ und $G_2(y)$ sogar kompakte und konvexe Körper sind, lassen sich die g_i sogar direkt angeben:

$$g_1(x) = \frac{1}{V_m(G_1(x))} \int_{G_1(x)} z \, dV \quad ,$$

$$g_2(y) = \frac{1}{V_n(G_2(y))} \int_{G_2(y)} z' \, dV' \quad .$$

Hierbei ist dV bzw. dV' das Volumenelement von $G_1(x)$ bzw. $G_2(y)$ und

$V_n(G_1(x)) = \inf \{ V_n(P_1(x)); P_1(x) \supset G_1(x) \text{ ist Polyeder} \}$. Dabei verstehen wir hier unter einem Polyeder eine kompakte konvexe Menge, die sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume darstellen läßt. Wir sagen, daß die g_i die zu G_i gehörenden Schwerpunktsabbildungen sind; sind die F_i einwertig, so ist $g_i = F_i$.

Wegen (2.4), (ii) ist $g_2 \circ g_1(x) \in G_2(g_1(x)) \subset G_2 \circ G_1(x) \subset Q_\delta(F_2 \circ F_1(x))$, insbesondere ist also die stetige

Funktion $g_2 \circ g_1$ auf ∂U_1 fixpunktfrei; es existiert also der Abbildungsgrad von Brouwer von $g_2 \circ g_1$ auf U_1^0 bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$. Wir können also den Abbildungsgrad von $F_2 \circ F_1$ auf U_1^0 bezüglich 0 definieren durch:

$$(2.6) \quad \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2 \circ g_1, U_1^0, 0) \quad .$$

Wir haben nun die Wohldefiniertheit von (2.6) nachzuweisen.

Dazu seien $\delta' > 0$, $\varepsilon' > 0$ mit $\{x\} \cap O_{\delta'}(F_2 \circ F_1(x)) = \emptyset$, für alle $x \in \partial U_1$ und G_1', G_2' die gemäß (2.4) existierenden bezüglich 0 komponierbaren stetigen Abbildungen mit den

zugehörigen Schwerpunktsabbildungen g_1' und g_2' .

Nach (2.6) ist dann

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2' \circ g_1', U_1^0, 0)$$

Wir setzen: $G_1''(x) = G_1(x) \cap G_1'(x)$, $\forall x \in U_1$ und

$$G_2''(y) = G_2(y) \cap G_2'(y), \quad \forall y \in U_2.$$

Dann sind nach (1.7) die G_i'' wieder stetig und bezüglich 0 komponierbar. (2.6) ergibt also wieder:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2'' \circ g_1'', U_1^0, 0),$$

wobei g_i'' die zu G_i'' gehörende Schwerpunktsabbildung ist.

Wir definieren Homotopien zwischen $g_2 \circ g_1$, $g_2'' \circ g_1''$ und $g_2' \circ g_1'$:

$$h_1'(x, t) = (1 - t)g_1(x) + tg_1'(x),$$

$$h_2'(y, t) = (1 - t)g_2(y) + tg_2'(y) \quad \text{und analog}$$

$$h_1''(x, t) = (1 - t)g_1''(x) + tg_1'(x),$$

$$h_2''(y, t) = (1 - t)g_2''(y) + tg_2'(y).$$

Da $g_i''(\cdot)$ sowohl in $G_i(\cdot)$ als auch in $G_i'(\cdot)$ liegt, folgt:

$$h_1'(x, t) \in G_1(x) \quad \text{und} \quad h_2'(y, t) \in G_2(y) \quad \text{und}$$

$$h_1''(x, t) \in G_1'(x) \quad \text{und} \quad h_2''(y, t) \in G_2'(y), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Durch $h'(x, t) = h_2'(h_1'(x, t), t)$ und $h''(x, t) = h_2''(h_1''(x, t), t)$

werden stetige Homotopien zwischen $g_2 \circ g_1$ und $g_2' \circ g_1'$ resp.

$g_2'' \circ g_1''$ erklärt. Wegen $h'(x, t) \in G_2(h_1(x, t)) \subset$

$$\subset G_2 \circ G_1(x) \quad \text{und} \quad h''(x, t) \in G_2'(h_1''(x, t)) \subset G_2' \circ G_1'(x), \quad \forall t \in [0, 1]$$

ist $h'(\{x\} \times I) \cap \{x\} = \emptyset$ und $h''(\{x\} \times I) \cap \{x\} = \emptyset$, $\forall x \in \partial U_1$.

(1.16) liefert dann:

$$\begin{aligned} \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2 \circ g_1, U_1^0, 0) &= \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2'' \circ g_1'', U_1^0, 0) \\ &= \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2' \circ g_1', U_1^0, 0), \end{aligned}$$

womit die Wohldefiniertheit von (2.6) nachgewiesen ist.

q.e.d.

Die beim Beweis der Wohldefiniertheit auftretenden Homotopien sind, wie wir eben gesehen haben, von spezieller

Form. h_i' und h_i'' sind im Sinne von (2.1) bezüglich 0 komponierbar. Hätten wir etwa angesetzt

$$h'(x,t) = (1-t)g_2 \circ g_1(x) + tg_2'' \circ g_1''(x), \text{ so wäre}$$

$h'(x,t) \subset \text{co}(G_2'' \circ G_1''(x))$. Diese Inklusion stellt aber i.A. nicht sicher, daß h' auf $\partial U_1 \times I$ fixpunktfrei ist, da $G_2'' \circ G_1''(x)$ nicht konvex zu sein braucht. Wir müssen also den Homotopiebegriff der Klasse der komponierbaren Abbildungen anpassen.

(2.7) Definition: Es seien $F_1, \dots, F_n$ und $G_1, \dots, G_n$ bezüglich 0 komponierbare Abbildungen. $F_n \dots F_1$ und $G_n \dots G_1$ heißen zulässig homotop bezüglich 0, wenn es n ohs Abbildungen $H_1, \dots, H_n$ gibt mit:

- (i) $H_i: U_i \times I \longrightarrow \text{Conv}(E_{i+1})$, $i = 1 \dots n$.
- (ii) $H_i(U_i \times I) \subset U_{i+1}^0$, $i = 1 \dots n-1$.
- (iii) $H_1(\cdot, 0) = F_1(\cdot)$; $H_i(\cdot, 1) = G_i(\cdot)$, $i = 1 \dots n$.
- (iv) Die durch $H(x,t) = H_n(H_{n-1}(\dots H_1(x,t), t) \dots t), t)$ definierte Homotopie zwischen $F_n \circ \dots \circ F_1$ und $G_n \circ \dots \circ G_1$ ist auf $\partial U_1 \times I$ fixpunktfrei.

Wir schreiben dann $F_n \circ \dots \circ F_1 \approx_0 G_n \circ \dots \circ G_1$.

(2.8) Bemerkung: Nennen wir eine Homotopie $H: U \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine δ -Homotopie, wenn für alle $x \in U$ und $t, t' \in I$ stets $\text{dist}(H(x,t), H(x,t')) < \delta$ gilt, so rechnet man leicht nach, daß $F_2 \circ F_1$ und $G_2 \circ G_1$ zulässig δ -homotop sind. Dabei sind die G_i Schwerpunktsabbildungen von geeigneten δ -Approximationen der F_i .

Im Folgenden beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften des durch (2.6) definierten Abbildungsgrades.

(2.9) Lemma: Sind die bezüglich 0 komponierbaren Abbildungen $F_2 \circ F_1$ und $F_2' \circ F_1'$ zulässig homotop, so gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - F_2' \circ F_1', U_1^0, 0).$$

Beweis: Nach Voraussetzung existieren komponierbare Homotopien $H_1: U_1 \times I \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$, $H_2: U_2 \times I \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$

mit: $\{x\} \cap H_2(H_1(x,t),t) = \emptyset$, $\forall (x,t) \in \partial U_1 \times I$

und $H_1(x,0) = F_1(x)$, $H_1(x,1) = F'_1(x)$

sowie $H_2(y,0) = F_2(y)$, $H_2(y,1) = F'_2(y)$.

Nach (2.4) und (2.6) existieren stetige Approximationen

G_i und G'_i mit den zugehörigen Schwerpunktsabbildungen,

sodaß gilt: $\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2 \circ g_1, U_1^0, 0)$

$\deg(\text{id} - F_2 \circ F'_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g'_2 \circ g'_1, U_1^0, 0)$.

Nach (2.8) sind $F_2 \circ F_1$ resp. $F'_2 \circ F'_1$ zu $g_2 \circ g_1$ resp. zu

$g'_2 \circ g'_1$ zulässig homotop bezüglich 0 ; es gibt also Homo-

topien h_i und h'_i mit:

$h_i(\cdot, 0) = g_i$; $h_i(\cdot, 1) = F_i$ sowie

$h'_i(\cdot, 0) = F'_i$; $h'_i(\cdot, 1) = g'_i$.

Auf $U_1 \times I$ wird nun eine Homotopie definiert durch :

$$K_1(x,t) = \begin{cases} h_1(x, 3t) & , \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ H_1(x, 3t-1) & , \text{ für } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ h'_1(x, 3t-2) & , \text{ für } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 ; \end{cases}$$

und entsprechend auf $U_2 \times I$:

$$K_2(y,t) = \begin{cases} h_2(y, 3t) & , \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ H_2(y, 3t-1) & , \text{ für } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ h'_2(y, 3t-2) & , \text{ für } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

Da alle auftretenden Homotopien komponierbar sind, sind K_1

und K_2 bezüglich 0 komponierbar und es gilt:

$K_2(K_1(x,0),0) = g_2 \circ g_1(x)$; $K_2(K_1(x,1),1) = g'_2 \circ g'_1(x)$.

Nach (2.4) und (2.6) gibt es $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ und be-

züglich 0 komponierbare stetige Abbildungen

$R_1: U_1 \times I \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$ und $R_2: U_2 \times I \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ mit:

$$K_1(x, t) \subset R_1(x, t)^0 \quad ; \quad K_2(y, t) \subset R_2(y, t)^0 \quad \text{und}$$

$$R_1(x, t) \subset O_\varepsilon(K_1(x, t)) \quad ; \quad R_2(y, t) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2\delta}}(K_2(y, t)) \quad \text{sowie}$$

$$R_2(O_\varepsilon(K_1(x, t)), t) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2\delta}}(R_2(K_1(x, t), t)) \quad , \quad \text{für}$$

alle $(x, t) \in U_1 \times I$ und $(y, t) \in U_2 \times I$.

Sind r_1 und r_2 die zugehörigen Schwerpunktsabbildungen, so folgt:

$$r_1(x, 0) \in R_1(x, 0) \subset O_\varepsilon(K_1(x, 0)) = O_\varepsilon(g_1(x)) \quad \text{und}$$

$$r_2(y, 0) \in R_2(y, 0) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2\delta}}(K_2(y, 0)) = O_{\frac{\varepsilon}{2\delta}}(g_2(y)) \quad \text{sowie}$$

$$r_2(r_1(x, 0), 0) \in R_2(O_\varepsilon(g_1(x)), 0) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2\delta}}(R_2(g_1(x), 0)) \\ \subset O_\delta(g_2 \circ g_1(x)) \quad , \quad \forall x \in U_1 .$$

Analog erhält man für $t = 1$:

$$r_2(r_1(x, 1), 1) \in O_\delta(g_2' \circ g_1'(x)) \quad .$$

Nun können wir eine einwertige stetige Homotopie zwischen

$g_2 \circ g_1$ und $g_2' \circ g_1'$ definieren:

$$z(x, t) = \begin{cases} (1-3t)g_2 \circ g_1(x) + 3tr_2(r_1(x, 0), 0) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ r_2(r_1(x, 3t-1), 3t-1) & , \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (3-3t)r_2(r_1(x, 1), 1) + (3t-2)g_2'(g_1'(x)) & , \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Wegen $r_2(r_1(x, t), t) \in O_\delta(K_2(K_1(x, t), t))$, ist z auf

$\partial U_1 \times I$ fixpunktfrei, (1.16) liefert also:

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) &= \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2 \circ g_1, U_1^0, 0) \\ &= \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2' \circ g_1', U_1^0, 0) \\ &= \deg(\text{id} - F_2' \circ F_1', U_1^0, 0) . \end{aligned}$$

q.e.d.

(2.10) Lemma: Sind F_1 und F_2 bezüglich 0 komponierbar und ist $\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) \neq 0$, so gibt es ein $x_0 \in U_1^0$ mit $x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0)$.

Beweis: 1. Fall: Seien die F_i stetig und f_i die entsprechenden Schwerpunktsabbildungen. Dann ist nach (2.6) auch $\deg_{\text{Br}}(\text{id} - f_2 \circ f_1, U_1^0, 0) \neq 0$, nach (1.14) gibt es also ein $x_0 \in U_1^0$ mit $x_0 = f_2(f_1(x_0)) \in F_2 \circ F_1(x_0)$.

2. Fall: Seien die F_i nun ohs.

Nach (2.4) existiert eine Folge positiver Zahlen

δ_k mit $\lim(\delta_k) = 0$ und dazu ein Folge stetiger Abbildungen

$$G_k^1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad G_k^2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit}$$

$$F_2 \circ F_1(x) \subset G_k^2 \circ G_k^1(x) \subset O_{2\delta_k}(F_2 \circ F_1(x)) \quad , \quad \forall x \in U_1 .$$

Sind g_k^1 und g_k^2 die entsprechenden Selektionen, so folgt mit (2.6) für genügend kleine δ_k :

$$0 \neq \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_k^2 \circ g_k^1, U_1^0, 0)$$

Nach dem 1. Fall gibt es also $x_k \in U_1^0$ mit:

$$x_k = g_k^2 \circ g_k^1(x_k) \in G_k^2 \circ G_k^1(x_k) \subset O_{2\delta_k}(F_2 \circ F_1(x_k)) .$$

Da U_1 kompakt ist und x_k in der kompakten Menge $G_k^2 \circ G_k^1(U_1)$ liegt, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß die x_k gegen ein $x_0 \in U_1$ konvergieren. Wegen $x_k \in O_{2\delta_k}(F_2 \circ F_1(x_k))$ existiert zu jedem x_k ein y_k mit:

$$y_k \in F_2 \circ F_1(x_k) \quad \text{und} \quad \|y_k - x_k\| < 2\delta_k \longrightarrow 0$$

Also muß auch y_k gegen x_0 konvergieren. Insgesamt gilt:

$$\left. \begin{array}{l} x_k \longrightarrow x_0 \\ y_k \longrightarrow x_0 \\ y_k \in F_2 \circ F_1(x_k) \end{array} \right\} \implies x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0) ,$$

wegen der Abgeschlossenheit von $F_2 \circ F_1$.

q.e.d.

Gilt zusätzlich $F_2(U_2) \subset U_1$, siehe auch Górniewicz [25].

(2.11) Korollar: Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ ohs und $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ ohs und injektiv. Ferner gelte:

(i) $F_1(U_1) \subset U_2^0$.

(ii) Für alle $x \in U_1$ ist $\{x\} \cap F_2^{-1} \circ F_1(x) = \emptyset$.

(iii) $\deg(\text{id} - F_2^{-1} \circ F_1, U_1^0, 0) \neq 0$.

Dann existiert ein $x_0 \in U_1^0$ mit $F_2(x_0) \cap F_1(x_0) \neq \emptyset$.

Beweis: Zunächst ist zu prüfen, ob der Abbildungsgrad in (iii) überhaupt existiert. Da F_2 injektiv ist, ist F_2^{-1} nach (1.3) einwertig, hat also insbesondere kompakte und konvexe Bilder. F_2^{-1} ist auch ohs (und damit sogar stetig), denn ist etwa $K \subset U_2$ abgeschlossen, so ist K auch kompakt und mit (1.5) folgt, daß auch $(F_2^{-1})^{-1}(K) = F_2(K)$ kompakt ist, also ist F_2^{-1} ohs. Die Voraussetzungen implizieren nun, daß F_1 und F_2^{-1} bezüglich 0 komponierbar sind, also existiert der Grad des zu $F_2^{-1} \circ F_1$ gehörenden Vektorfeldes und nach (2.10) gibt es ein $x_0 \in U_1$ mit $x_0 \in F_2^{-1} \circ F_1(x_0)$, woraus die Behauptung folgt.

q.e.d.

(2.12) Lemma: Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und A, B abgeschlossen Teilmengen von U_1 mit $A \cup B = U_1$ und $A^0 \cap B^0 = \emptyset$. Sind $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(U_2^0)$, $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^n)$ ohs und gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_A, A^0, 0) + \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_B, B^0, 0) .$$

Beweis: Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} \partial U_1 &= \partial(A \cup B) = (A \cup B)^- \cap \bigcup (A \cup B)^- \\ &= A \cap (\bigcup A \cap \bigcup B)^- \cup B \cap (\bigcup A \cap \bigcup B)^- \\ &\subset (A \cap \bigcup A) \cup (B \cap \bigcup B) \\ &= \partial A \cup \partial B . \end{aligned}$$

Der linke Ausdruck von (2.12) ist also wohldefiniert. Sind die F_i stetig, so reduziert sich (2.12) auf eine Aussage über stetige einwertige Abbildungen. Sind die F_i ohs, so gibt es gemäß (2.4) und (2.6) bezüglich 0 komponierbare stetige Abbildungen G_1 , G_2 mit

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - G_2 \circ G_1, U_1^0, 0) \quad ,$$

womit sich (2.12) wiederum auf stetige einwertige Abbildungen zurückführen läßt.

q.e.d.

Da die Normalisierungseigenschaft (1.13) für unseren Abbildungsgrad trivialerweise erfüllt ist, besitzt der durch (2.6) definierte Grad alle wesentlichen Eigenschaften im Sinne von [1].

(2.13) Bemerkung: Um die bisher entwickelte Abbildungsgradtheorie auch auf unendlichdimensionale Räume übertragen zu können, müssen die bisherigen Kompaktheitsvoraussetzungen über U_1 und U_2 fallen gelassen werden. Beschränkt man sich auf normierbare Räume, so ist kompakt durch abgeschlossen und beschränkt zu ersetzen, will man jedoch auch lokal-konvexe Räume untersuchen, so muß die Beschränktheitsvoraussetzung noch fallen gelassen werden. Denn bekanntlich läßt sich auf einem lokalkonvexen Raum, der eine abgeschlossene (mit nichtleerem Inneren) und beschränkte Teilmenge besitzt, eine Norm definieren, die die vorgegebene Topologie erzeugt.

Wir setzen jetzt voraus, daß $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Mengen mit nichtleerem Inneren sind und F_1 , F_2 kompakte ohs bezüglich 0 komponierbare Operatoren. Die Kompaktheit der F_i impliziert, daß $F_2 \circ F_1(U_1)$ relativ kompakt ist und somit eine im $\mathbb{R}^n$ offene und beschränkte Umgebung V existiert mit:

$$F_2 \circ F_1(U_1) \subset V \quad \text{und} \quad U_1^0 \cap V \neq \emptyset \quad .$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\partial(U_1 \cap V) &= (U_1 \cap V)^- \cap (\overline{(U_1 \cap V)})^- \\ &\subset U_1 \cap V^- \cap (\overline{U_1} \cup \overline{V}) \\ &= (U_1 \cap V^- \cap \overline{U_1}) \cup U_1 \cap V^- \cap \overline{V} \\ &= (\partial U_1 \cap V^-) \cup (\partial V \cap U_1) .\end{aligned}$$

Da die F_1 bezüglich 0 komponierbar sind, ist

$$0 \notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial(U_1 \cap V)) .$$

Gäbe es nämlich ein $x_0 \in \partial(U_1 \cap V)$ mit $x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0)$, so wäre nach der eben bewiesenen Ungleichung $x_0 \in \partial V \cap U_1$, da x_0 nach Voraussetzung ja nicht in ∂U_1 liegen darf. Da V offen ist, liegt x_0 nicht in V , andererseits gilt aber:

$$x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0) \subset F_2 \circ F_1(U_1) \subset V .$$

Dieser Widerspruch beweist die behauptete Randbedingung und daher können wir definieren:

$$(2.13) \quad \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V)^-}, U_1^0 \cap V, 0) ,$$

und haben zu zeigen, daß (2.13) unabhängig von der Wahl von V ist. Dazu seien V' und V'' weitere offene und beschränkte Nullumgebungen mit $F_2 \circ F_1(U_1) \subset V'$ und $V \cup V' \subset V''$. Wegen $0 \notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)((V'' \cap U_1)^- \setminus V)$ können wir (2.12) anwenden:

$$\begin{aligned}\deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V'')^-}, U_1^0 \cap V'', 0) &= \\ &= \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V)^-}, U_1^0 \cap V, 0) + \\ &+ \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V'')^- \setminus V}, (U_1 \cap V'' \setminus V)^0, 0) .\end{aligned}$$

Da $0 \notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)((V'' \cap U_1)^- \setminus V)$, verschwindet nach (2.10) der letzte Summand. Analog erhält man:

$$\begin{aligned}\deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V')^-}, U_1^0 \cap V', 0) &= \\ &= \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V)^-}, U_1^0 \cap V, 0) ,\end{aligned}$$

womit die Wohldefiniertheit von (2.13) nachgewiesen ist.

Ist U_1 selbst schon kompakt, so folgt:

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) &= \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, (U_1 \cap V) \cup (U_1 \setminus V)^0, 0) \\ &= \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V)^-}, U_1^0 \cap V, 0) + \\ &\quad + \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \setminus V)^-}, (U_1 \setminus V)^0, 0) \\ &= \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V)^-}, U_1^0 \cap V, 0) , \end{aligned}$$

Definition (2.6) ist also in (2.13) enthalten.

Wir merken an, daß das eben angewendete Beweisprinzip die sogenannte "Reduktionseigenschaft" des Abbildungsgrades liefert. Auf die Einzelheiten des einfachen Beweises sei hier verzichtet.

(2.14) Lemma: Es gelten die Voraussetzungen wie zu (2.13). Ferner sei $F_2(U_2) \subset \mathbb{R}^p$, $p < n$. Dann gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap \mathbb{R}^p)^-}, U_1^0 \cap \mathbb{R}^p, 0)$$

(2.14) stellt also einen Zusammenhang zwischen den Graden im $\mathbb{R}^n$ und im $\mathbb{R}^p$ her. Dabei wird der $\mathbb{R}^p$ mit dem Raum

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x_{p+1} = \dots = x_n = 0\}$$

identifiziert.

§3 DER ABBILDUNGSGRAD IN LOKALKONVEXEN RÄUMEN

In diesem Paragraphen übertragen wir das im vorigen Abschnitt entwickelte Abbildungsgradkonzept auf separierte lokalkonvexe Räume und beweisen die wichtigsten Eigenschaften. Zum Schluß stellen wir einen Zusammenhang zu schon bekannten Abbildungsgradkonzepten her.

3.1 Definition und Eigenschaften des Abbildungsgrades

Wir machen die folgenden Voraussetzungen:

- (3.1) $U_1 \subset E$, $U_2 \subset E'$ seien abgeschlossene Teilmengen der separierten lokalkonvexen Räume E und E' und die Abbildungen $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E)$, $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E')$ seien bezüglich $0 \in E$ komponierbar und kompakt.

Wegen $0 \notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1)$ existiert eine kreisförmige konvexe Nullumgebung $V_2 \subset E$ mit:

$$V_2 \cap (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1) = \emptyset.$$

Nach (1.12) gibt es zu diesem V_2 ein endlichdimensionales kompaktes $G_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E_1)$, $E_1 \subset E$, mit:

$$G_2(y) \subset F_2(y) + V_2; \quad F_2(y) \subset G_2(y) + V_2, \quad \forall y \in U_2.$$

- (3.2) Lemma: Es liege die oben beschriebene Situation vor. Dann existiert eine kreisförmige konvexe Nullumgebung $V_1 \subset E'$ mit:

$$G_2^-(x) \cap F_1(x) + V_1 = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1.$$

Beweis: Wir nehmen an, die Aussage ist falsch, dann gibt es zu jeder Nullumgebung $V \subset E'$ ein $x_V \in \partial U_1$ mit

$G_2^-(x_V) \cap (F_1(x_V) + V) \neq \emptyset$. Wegen der Kompaktheit von F_1 gibt es eine Nullumgebung $V_0 \subset E'$ mit $F_1(U_1) + V_0 \subset U_2$.

Für alle $V \subset V_0$ ist dann $x_V \in G_2(F_1(x_V) + V) \subset G_2(U_2)$.

(x_v) ist also ein Netz in der relativ kompakten Menge $G_2(U_2)$, es enthält also ein gegen $x_0 \in \partial U_1$ konvergentes Teilnetz, das wir wieder mit (x_v) bezeichnen. Unter Berücksichtigung von (1.7) und (1.5) folgt für jedes V :

$$\begin{aligned} x_0 &\in G_2(F_1(x_0) + V) \\ \Rightarrow x_0 &\in \bigcap_{V \subset V_0} G_2(F_1(x_0) + V) \\ &= \bigcap_{V \subset V_0} \left(\bigcup_{z_v \in F_1(x_0) + V} G_2(z_v) \right) \end{aligned}$$

Zu z_v existieren $y_v \in F_1(x_0)$ und $v \in V$ mit $z_v = y_v + v$. Da $F_1(x_0)$ kompakt ist, konvergiert (y_v) gegen ein $y_0 \in F_1(x_0)$, folglich konvergiert auch (z_v) gegen y_0 , also ist: $x_0 \in G_2(y_0)$, $y_0 \in F_1(x_0)$ oder $x_0 \in G_2(F_1(x_0))$, was aber im Widerspruch zu den Voraussetzungen steht.

q.e.d.

Zu dem gemäß (3.2) existierenden V_1^{+} wählen wir ein endlichdimensionales kompaktes $G_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E_2)$, $E_2 \subset E'$, mit:

$$G_1(x) \subset F_1(x) + V_1 \quad ; \quad F_1(x) \subset G_1(x) + V_1 \quad , \quad \forall x \in U_1 .$$

Dann ist $G_2^-(x) \cap G_1(x) = \emptyset$, für alle $x \in \partial U_1$, folglich sind G_2 und G_1 bezüglich 0 komponierbar. Ist dann

$E_1 \subset E$ ein endlichdimensionaler Teilraum mit:

$$G_2(U_2) \subset E_1 \quad \text{und} \quad U_1^0 \cap E_1 \neq \emptyset \quad ,$$

so können wir definieren:

$$(3.3) \quad \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - G_2 \circ G_1)|_{(U_1 \cap E_1)^-}, U_1^0 \cap E_1, 0)$$

Wir haben nun zu zeigen, daß (3.3) unabhängig von der Wahl der V_i und damit auch der G_i ist. Dazu wählen wir weitere

+) Für V_1 gelte darüberhinaus: $F_1(U_1) + V_1 \subset U_2$.

kreisförmige und konvexe Nullumgebungen $V_i^!$ mit den entsprechenden Eigenschaften der V_i . Mit $G_i^!$ bezeichnen wir die zu $V_i^!$ gehörenden kompakten ohs Operatoren, deren Bilder in endlichdimensionalen Teilräumen $E_i^!$ liegen. Dann sei:

$$G_1''(x) = G_1(x) \cap G_1^!(x) \quad \text{und} \quad G_2''(y) = G_2(y) \cap G_2^!(y) \quad \text{sowie}$$

$$H_1(x, t) = tG_1(x) + (1-t)G_1''(x) \quad ,$$

$$H_1^!(x, t) = tG_1^!(x) + (1-t)G_1''(x) \quad , \quad \text{für alle } (x, t) \in U_1 \times I ;$$

$$H_2(y, t) = tG_2(y) + (1-t)G_2''(y) \quad ,$$

$$H_2^!(y, t) = tG_2^!(y) + (1-t)G_2''(y) \quad , \quad \text{für alle } (y, t) \in U_2 \times I .$$

Wegen $H_i(\cdot, t) \subset G_i(\cdot)$ und $H_i^!(\cdot, t) \subset G_i^!(\cdot)$, sind die

H_i und die $H_i^!$ bezüglich 0 komponierbar. Aus (2.9)

und der Reduktionseigenschaft (2.14) folgt dann

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) &= \deg((\text{id} - G_2 \circ G_1)|_{(U_1 \cap E_p)^-}, U_1^0 \cap E_p, 0) \\ &= \deg((\text{id} - G_2'' \circ G_1'')|_{(U_1 \cap E_p)^-}, U_1^0 \cap E_p, 0) \\ &= \deg((\text{id} - G_2' \circ G_1^!)|_{(U_1 \cap E_p)^-}, U_1^0 \cap E_p, 0) , \end{aligned}$$

wobei E_p ein E_1 und $E_1^!$ umfassender endlichdimensionaler Teilraum von E sei. Damit ist die Wohldefiniertheit von (3.3) bewiesen.

(3.4) Bemerkung: Unter stärkeren Voraussetzungen an U_1 kann man auf die Kompaktheitsforderung an F_1 verzichten. Wir setzen voraus:

- (i) U_1 ist endlich-beschränkt und abgeschlossen, d.h. der Durchschnitt mit jedem endlichdimensionalen Teilraum $E_1 \subset E$ ist kompakt.
- (ii) $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E')$ ist ohs und es ist $F_1(U_1)^- \subset U_2$.
- (iii) $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ ist ohs und kompakt und es gilt:

$$\{0\} \cap (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1) = \emptyset$$

Wegen (iii) können wir dasselbe G_2 und V_2 wie in obiger

Konstruktion verwenden. Da $F_1|_{U_1 \cap E_1}$ wegen (i) eine kompakte Abbildung ist, existiert eine kreisförmige konvexe Nullumgebung $V_1' \subset E'$ mit: $G_2^-(x) \cap F_1(x) + V_1' = \emptyset$, $\forall x \in \partial U_1 \cap E_1$, und wegen (ii) gibt es eine weitere Nullumgebung V_1'' mit $F_1(U_1 \cap E_1)^- + V_1'' \subset U_2$. Sei $V_1 \subset V_1' \cup V_1''$ kreisförmig und konvex, so wählen wir dazu ein kompaktes und endlichdimensionales $G_1: U_1 \cap E_1 \longrightarrow \text{Conv}(E_2)$, $E_2 \subset E'$ endlichdimensional, mit: $G_1(x) \subset F_1(x) + V_1$; $F_1(x) \subset G_1(x) + V_1$, $\forall x \in U_1 \cap E_1$. Dann sind die G_1 bezüglich $0 \in E_1$ komponierbar und wir können definieren:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - G_2 \circ G_1)|_{(U_1 \cap E_1)}, U_1^0 \cap E_1, 0).$$

Der Beweis der Wohldefiniertheit verläuft dann analog zu (3.3).

(3.5) Bemerkung: In Analogie an die einwertige Situation nennen wir eine ohs Abbildung F auf einer Teilmenge U ihres Definitionsbereichs gleichmäßig ohs, wenn es zu jeder Nullumgebung V_2 aus dem Bildbereich eine Nullumgebung V_1 aus dem Urbildbereich so gibt, daß für alle $x \in U$ gilt:

$$F(x + (V_1 \cap U)) \subset F(x) + V_2$$

Im Gegensatz zu (1.6) sind ohs Abbildungen auf kompakten Mengen i.A. nicht gleichmäßig ohs, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei $F: [0,1] \longrightarrow \text{Conv}([-1,1])$ definiert durch:

$$F(x) = \begin{cases} [\sin(\frac{\pi}{x}), 1] & , \text{ falls } x \in (0,1] \\ \{1\} & , \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

F ist dann auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ ohs, jedoch nicht gleichmäßig ohs. Seien nämlich $x_n = 2/(4n+1)$ und

$y_n = 2/(4n+3)$, dann ist $F(x_n) = \{1\}$ und $F(y_n) = [-1,1]$ und es ist $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$. Gäbe es nun zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ mit: $F(O_\delta(x_n)) \subset (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, so würde diese

Inklusion auch für y_n gelten müssen, falls n so groß gewählt ist, daß $\|x_n - y_n\| < \delta$ ist. Dann wäre aber $y_n \in O_\delta(x_n)$, was jedoch im Widerspruch zu $F(y_n) = [-1, 1]$ steht.

Betrachtet man nun bezüglich O komponierbare Operatoren F_1 und F_2 mit der zusätzlichen Maßgabe, daß F_2 auf $F_1(U_1)$ gleichmäßig ohs ist, so erhält man ein (2.4) analoges Ergebnis für die endlichdimensionale Approximation. Folglich läßt sich dann auch der Abbildungsgrad von $\text{id} - F_2 \circ F_1$ in (2.6) entsprechender Weise auf lokalkonvexe Räume übertragen.

Wir übertragen nun die in §2 bewiesenen Eigenschaften des Abbildungsgrades auf unendlichdimensionale Räume.

(3.6) Theorem: Seien $F_1, F'_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E')$ und $F_2, F'_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ bezüglich O zulässig homotop, dann gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^O, O) = \deg(\text{id} - F'_2 \circ F'_1, U_1^O, O) \quad .$$

Beweis: Es existieren kompakte ohs Operatoren

$$H_1: U_1 \times I \longrightarrow \text{Conv}(E') \quad \text{und} \quad H_2: U_2 \times I \longrightarrow \text{Conv}(E) \quad \text{mit}$$

$$H_1(x, 0) = F_1(x) \quad ; \quad H_1(y, 0) = F_2(y) \quad \text{sowie}$$

$$H_1(x, 1) = F'_1(x) \quad ; \quad H_1(y, 1) = F'_2(y) \quad .$$

Setzen wir $H_1^t(x) = H_1(x, t)$ und $H_2^t(y) = H_2(y, t)$ so gilt für alle $t \in I$: $\{O\} \cap (\text{id} - H_2^t \circ H_1^t)(\partial U_1) = \emptyset$.

Wegen der Kompaktheit der rechten Seite existiert eine kreisförmige konvexe Nullumgebung $V_2 \subset E$ mit:

$$(a) \quad V_2 \cap (\text{id} - H_2^t \circ H_1^t)(\partial U_1) = \emptyset \quad , \quad \forall t \in I \quad .$$

Zu V_2 gibt es kompakte und endlichdimensionale ohs Operatoren $G_2^t: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E_1)$, $E_1 \subset E$ endlichdimensional, mit: $G_2^t(y) \subset H_2^t(y) + V_2$; $H_2^t(y) \subset G_2^t(y) + V_2$, $\forall t \in I$.

Daraus und aus (a) folgt für alle $t \in I$:

$G_2^{t-}(x) \cap H_1^t(x) = \emptyset$, $\forall x \in \partial U_1$. Nach (3.2) existiert dann eine (von t unabhängige) ¹⁾ kreisförmige und konvexe Nullumgebung $V_1 \subset E'$ mit $H_1^t(U_1) + V_1 \subset U_2$ und $G_2^{t-}(x) \cap H_1^t(x) + V_1 = \emptyset$, $\forall (x,t) \in \partial U_1 \times I$.

Zu diesem V_1 wählen wir ohs endlichdimensionale Operatoren G_1^t gemäß (1.12) und erhalten aus (3.3) :

$$\deg(\text{id} - H_2^t \circ H_1^t, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - G_2^t \circ G_1^t)|_{(U_1 \cap E_1)^-}, U_1^0 \cap E_1, 0)$$

Durch $G(x,t) = G_2(G_1(x,t),t)$ mit $G_2(y,t) = G_2^t(y)$ und $G_1(x,t) = G_1^t(x)$ wird dann eine zulässige Homotopie zwischen $G_2^0 \circ G_1^0$ und $G_2^1 \circ G_1^1$ definiert und es folgt aus (2.9) :

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2^0 \circ F_1^0, U_1^0, 0) &= \deg(\text{id} - H_2^0 \circ H_1^0, U_1^0, 0) \\ &= \deg((\text{id} - G_2^0 \circ G_1^0)|_{(U_1 \cap E_1)^-}, U_1^0 \cap E_1, 0) \\ &= \deg((\text{id} - G_2^1 \circ G_1^1)|_{(U_1 \cap E_1)^-}, U_1^0 \cap E_1, 0) \\ &= \deg(\text{id} - H_2^1 \circ H_1^1, U_1^0, 0) \\ &= \deg(\text{id} - F_2^1 \circ F_1^1, U_1^0, 0) . \end{aligned}$$

q.e.d.

Mit Hilfe von (2.14) beweist man leicht die Summeneigenschaft des Abbildungsgrades, auf den einfachen Beweis sei hier verzichtet.

(3.7) Theorem: Seien F_1 und F_2 bezüglich 0 komposierbar, $A, B \subset U_1$ abgeschlossene und nichtleere Mengen mit $A^0 \cap B^0 = \emptyset$ und $A \cup B = U_1$. Ist dann

$$0 \notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial A \cup \partial B) \quad , \quad \text{so gilt:}$$

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) &= \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_A, A^0, 0) + \\ &\quad + \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_B, B^0, 0) . \end{aligned}$$

1)

Daß die Wahl von V_1 unabhängig von t ist, beweist man leicht indirekt.

Wir hatten bisher stets den Abbildungsgrad bezüglich 0 komponierbarer Operatoren betrachtet. Ist $p \in E$, so sagen wir, daß F_1 und F_2 bezüglich p komponierbar sind, wenn F_1 und $(F_2 + p)$ bezüglich 0 komponierbar sind; wir können also definieren:

(3.8) $\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, p) = \deg(\text{id} - (F_2 \circ F_1 + p), U_1^0, 0)$, falls der rechte Ausdruck sinnvoll ist.

(3.9) Theorem: Seien F_1 und F_2 bezüglich $p \in E$ komponierbar und $C \subset E \setminus (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1)$ eine p enthaltende Zusammenhangskomponente. Dann gilt für beliebiges $q \in C$:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, p) = \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, q).$$

Beweis: Da $E \setminus (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1)$ offen ist und jeder topologische lineare Raum lokal-wegzusammenhängend ist, stimmen die Wegkomponenten von $E \setminus (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1)$ mit den Zusammenhangskomponenten überein. Es gibt also eine stetige Funktion $s: I \longrightarrow C$ mit $s(0) = p$ und $s(1) = q$.

Wir zeigen nun, daß $F_2 \circ F_1 + p$ und $F_2 \circ F_1 + q$ bezüglich 0 zulässig homotop sind. Dazu sei $H_1(x, t) = F_1(x)$ und $H_2(y, t) = F_2(y) + s(t)$. Es bleibt zu prüfen, ob $H_2 \circ H_1$ auf $\partial U_1 \times I$ fixpunktfrei ist. Angenommen es existiert ein Paar $(x_0, t_0) \in \partial U_1 \times I$ mit $x_0 \in H_2(F_1(x_0), t_0)$ dann ist

$$\begin{aligned} x_0 &\in F_2 \circ F_1(x_0) + s(t_0) \\ \implies s(t_0) &\in x_0 - F_2 \circ F_1(x_0) \\ &\subset (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1). \end{aligned}$$

Das steht aber im Widerspruch zur Definition von s . Mit (3.6) folgt also:

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, p) &= \deg(\text{id} - (F_2 \circ F_1 + p), U_1^0, 0) \\ &= \deg(\text{id} - (F_2 \circ F_1 + q), U_1^0, 0) \\ &= \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, q). \end{aligned}$$

q.e.d.

Durch Rückführung auf die entsprechende endlichdimensionale Situation beweist man leicht folgendes

(3.10) Theorem: Seien F_1 und F_2 bezüglich 0 komponierbar und $E_0 \subset E$ ein Unterraum, der $F_2 \circ F_1(U_1)^-$ enthält. Dann gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap E_0)^-}, U_1^0 \cap E_0, 0) .$$

3.2 Beziehungen zu anderen Abbildungsgradkonzepten

Wir hatten bisher den Abbildungsgrad von kompakten Vektorfeldern der Form $\text{id} - F_2 \circ F_1$, wobei die F_i bezüglich eines Punktes p komponierbare kompakte Operatoren sind, bestimmen können. Nun kann es zwei weitere bezüglich p komponierbare Operatoren F'_1 und F'_2 geben mit $F_2 \circ F_1 = F'_2 \circ F'_1$ und $F_1 \neq F'_1$ ¹⁾. Wir wollen nun Bedingungen dafür angeben, wann die Abbildungsgrade der entsprechenden Vektorfelder übereinstimmen.

(3.11) Proposition: Seien F_1, F_2 und F'_1, F'_2 bezüglich 0 komponierbare kompakte Operatoren mit:

(i) F_2 und F'_2 seien auf $F_1(U_1)$ resp. auf $F'_1(U_1)$ gleichmäßig ohs.

(ii) $0 \in \overline{\partial \partial}((\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1) \cup (\text{id} - F'_2 \circ F'_1)(\partial U_1))$.

Dann gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - F'_2 \circ F'_1, U_1^0, 0) .$$

Beweis: 1. Schritt: Wir nehmen zunächst an, daß U_1 und U_2 **kompakte** Teilmengen endlichdimensionaler Räume E und E' sind. Dann folgt aus (ii) und (2.2) die Existenz positiver Zahlen δ' und δ'' mit:

1)

Vergleiche hierzu das von Powers in [49] angegebene Beispiel.

$$(a) \quad \{x\} \cap O_{2\delta}(F_2 \circ F_1(x)) = O_{2\delta''}(F_2' \circ F_1'(x)) = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1.$$

Zu $\delta \leq \min\{\delta', \delta''\}$ mit

$$0 \notin O_\delta(\overline{\text{co}}((\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1) \cup (\text{id} - F_1' \circ F_2')(\partial U)))$$

gibt es gemäß (1.9) stetige Abbildungen $G_2, G_2': U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$

mit $G_2(y) \subset O_\delta(F_2(y))$ und $G_2'(y) \subset O_\delta(F_2'(y))$. Seien nun

$\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ die gemäß (2.3) existierenden Zahlen mit:

$$G_2^-(x) \cap O_\varepsilon(F_1(x)) = G_2'^-(x) \cap O_{\varepsilon''}(F_1'(x)) = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1,$$

$$(O_\varepsilon(F_1(U_1)))^- \subset U_2^0 \quad \text{und} \quad (O_{\varepsilon''}(F_1'(U_1)))^- \subset U_2^0.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von G_2 und G_2' gibt es

zu $\delta \quad \delta', \delta'' > 0$ mit:

$$G_2(O_{\delta'}(F_1(x))) \subset O_\delta(G_2 \circ F_1(x)) \quad ; \quad G_2'(O_{\delta''}(F_1'(x))) \subset O_\delta(G_2' \circ F_1'(x)),$$

für alle $x \in U_1$. Zu $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon'', \delta', \delta''\}$ wählen wir ge-

mäß (1.9) stetige Abbildungen $G_1, G_1': U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E)$.

Für $x \in U_1$ ist dann $G_2 \circ G_1(x) \subset O_{2\delta}(F_2 \circ F_1(x))$ und entsprechend

für die gestrichenen Abbildungen. Sind g_i resp. g_i' die zugehörigen Schwerpunktsabbildungen, so folgt mit (2.6):

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2 \circ g_1, U_1^0, 0),$$

$$\deg(\text{id} - F_2' \circ F_1', U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2' \circ g_1', U_1^0, 0).$$

Durch $h(x, t) = t g_2 \circ g_1 + (1-t) g_1' \circ g_1'(x)$, $\forall (x, t) \in U_1 \times I$

wird dann eine Homotopie zwischen $g_2 \circ g_1$ und $g_2' \circ g_1'$ er-

klärt, die auf $\partial U_1 \times I$ fixpunktfrei ist. Anderenfalls gäbe

es ein Paar $(x_0, t_0) \in \partial U_1 \times I$ mit $x_0 = h(x_0, t_0)$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 \cdot (\text{id} - g_2 \circ g_1)(x_0) + (1-t_0) \cdot (\text{id} - g_2' \circ g_1')(x_0) \\ &\in t_0 \cdot (\text{id} - G_2 \circ G_1)(x_0) + (1-t_0) \cdot (\text{id} - G_2' \circ G_1')(x_0) \\ &\subset t_0 \cdot O_{2\delta}((\text{id} - F_2 \circ F_1)(x_0)) + (1-t_0) \cdot O_{2\delta}((\text{id} - F_2' \circ F_1')(x_0)) \\ &\subset \text{co}(O_{2\delta}((\text{id} - F_2 \circ F_1)(x_0) \cup (\text{id} - F_2' \circ F_1')(x_0))) \\ &\subset O_{2\delta}(\text{co}((\text{id} - F_2 \circ F_1)(x_0) \cup (\text{id} - F_2' \circ F_1')(x_0))), \end{aligned}$$

das steht aber im Widerspruch zur Wahl von δ . Aus (1.16)

folgt nun die Gleichheit beider Abbildungsgrade; damit ist der erste Beweisschritt vollendet.

2. Schritt: Es seien nun die F_1 und die F_1' kompakt und die U_1 abgeschlossen. Es genügt dann, eine offene und beschränkte Menge V so zu wählen, daß gilt:

$F_2 \circ F_1(U_1) \cup F_2' F_1'(U_1) \subset V$. Berücksichtigt man (2.13) so verläuft der 2. Schritt dann analog zum ersten.

3. Schritt: Eingedenk der Bemerkung (3.5) und der Tatsache, daß die F_2 und F_2' gleichmäßig ohs stetig sind, beweist man den allgemeinen lokalkonvexen Fall ganz analog zum 2. Schritt.

q.e.d.

(3.12) Korollar: Seien F_1, F_2 und F_1', F_2' komponierbare kompakte Operatoren mit:

(i) F_2 resp. F_2' sind auf $F_1(U_1)$ resp. auf $F_1'(U_1)$ gleichmäßig ohs.

(ii) $F_2 \circ F_1|_{\partial U_1} = F_2' \circ F_1'|_{\partial U_1}$.

(iii) $0 \notin \overline{\text{co}}((\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1))$.

Dann gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - F_2' \circ F_1', U_1^0, 0).$$

(3.13) Bemerkung: Wie der Beweis gezeigt hat, benötigt man im endlichdimensionalen Fall die gleichmäßige Oberhalbstetigkeit von F_2 und F_2' nicht, um (3.11) beweisen zu können.

Sei $U_1 \subset E$ abgeschlossen. Eine Abbildung $F: U \rightarrow \text{Comp}(E)$ nennen wir bezüglich 0 zulässig zerlegbar, wenn es bezüglich 0 komponierbare kompakte Operatoren $F_1: U_1 \rightarrow \text{Conv}(E')$ und $F_2: U_2 \rightarrow \text{Conv}(E)$ gibt mit:

(i) F_2 ist auf $F_1(U_1)$ gleichmäßig ohs.

(ii) $F(x) = F_2 \circ F_1(x)$, $\forall x \in U_1$.

(iii) $0 \notin \overline{\text{co}}((\text{id} - F)(\partial U_1))$.

Analog zu (2.1) läßt sich dieser Begriff auch für $n > 2$ formulieren. Wegen (3.12) können wir nun definieren:

$$\deg(\text{id} - F, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) \quad ,$$

wobei die rechte Seite gemäß (3.3) zu bilden ist.

Betrachtet man anstelle von F die durch $\overline{\text{co}}(F(x)) = F'(x)$ definierte Funktion, so ist F' zwar auf dem Rande von U_1 fixpunktfrei, der Abbildungsgrad des Feldes $\text{id} - F'$, etwa im Sinne von [38], braucht jedoch nicht zu existieren. Ist nämlich E ein LCTVS, der nicht quasivollständig (siehe [36], p.213, p.244) ist, so braucht weder $F'(x)$ noch $F'(U_1)^-$ kompakt zu sein. Anderenfalls folgt aus $F(x) \subset F'(x)$ und der Bedingung (iii) :

$$0 \notin \overline{\text{co}}((\text{id} - F')(x)) = \overline{\text{co}}((\text{id} - F)(x) \cup (\text{id} - F')(x))$$

(3.11) ergibt also:

$$\deg(\text{id} - F, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - F', U_1^0, 0) \quad .$$

Aus der Konstruktion unseres Abbildungsgrades folgt dann:

$$\deg(\text{id} - F', U_1^0, 0) = \deg_c(\text{id} - F', U_1^0, 0) \quad .$$

Dabei ist $\deg_c$ der Grad für kompakte Vektorfelder im Sinne von [32] oder [38] .

§4 FIXPUNKT- UND ABBILDUNGSSÄTZE

(4.1) Theorem: Sind $F_1:U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E')$ und $F_2:U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$, wobei - wie üblich - $U_1 \subset E$ und $U_2 \subset E'$ abgeschlossen Mengen mit nichtleerem Inneren sind, bezüglich 0 komponierbar und kompakt und ist $\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) \neq 0$, so besitzt $F_2 \circ F_1$ mindestens einen Fixpunkt in U_1^0 .

Beweis: Wir beweisen die logische Kontraposition von (4.1).

Es gelte also: $0 \notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)(U_1)$

Da nach (1.10) die rechte Seite abgeschlossen ist, gibt es eine kreisförmige und konvexe Nullumgebung $V_2 \subset E$ mit:

$$V_2 \cap (\text{id} - F_2 \circ F_1)(U_1) = \emptyset.$$

Entsprechend der Konstruktion des letzten Paragraphen existieren dann endlichdimensionale kompakte und bezüglich 0 komponierbare Operatoren G_1 mit $x \notin G_2 \circ G_1(x)$, $x \in U_1$ und:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - G_2 \circ G_1)|_{(U_1 \cap E_1)^-}, U_1^0 \cap E_1, 0)$$

Dabei ist $E_1 \subset E$ ein endlichdimensionaler Raum mit

$G_2 \circ G_1(U_1)^- \subset E_1$. Nach (2.10) und der Bemerkung (2.13)

muß dann die rechte Seite verschwinden.

q.e.d.

Das folgende Ergebnis ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Resultates von Leray-Schauder. Ist $F_2 \circ F_1(x)$ für alle $x \in U_1$ konvex, vergleiche man [38]; ist $F_2 \circ F_1(x)$ für alle $x \in U_1$ azyklisch und ist $F_2 \circ F_1$ lediglich eine kondensierende Abbildung eines Banachraumes in sich, vergleiche man [39].

(4.2) Theorem: Sei U_1 eine offene Nullumgebung in E , F_1 und F_2 seien komponierbar und kompakt und genügen der folgenden Randbedingung:

(LS) Aus $\{\lambda x\} \cap F_2 \circ F_1(x) \neq \emptyset$ für ein $x \in \partial U_1$, folgt $\lambda < 1$.
Dann ist $\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1, 0) = 1$.

Beweis: Wir definieren eine bezüglich 0 zulässige Homotopie zwischen der Nullabbildung $\underline{0}$ und $F_2 \circ F_1$. Dazu sei

$$\begin{aligned} H_1(x, t) &= F_1(x) \quad \text{und} \quad H_2(y, t) = tF_2(y) \quad \text{Wegen} \\ H(x, t) &= H_2(H_1(x, t), t) = \bigcup_{y \in F_1(x)} tF_2(y) \\ &= t \left(\bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y) \right) \\ &= tF_2 \circ F_1(x) \quad , \end{aligned}$$

ist $H(x, 0) = \underline{0}$ und $H(x, 1) = F_2 \circ F_1(x)$. Angenommen es existiert ein Paar $(x_0, t_0) \in \partial U_1 \times I$ mit $x_0 \in t_0 F_2 \circ F_1(x_0)$. Da x_0 Randpunkt einer Nullumgebung ist, muß $t_0 \neq 0$ sein.

Es folgt also:

$$\frac{1}{t_0} x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0) \iff \left\{ \frac{1}{t_0} x_0 \right\} \cap F_2 \circ F_1(x_0) \neq \emptyset$$

Die Bedingung (LS) liefert dann $1 < t_0$. (3.6) und (1.13)

ergeben:

$$1 = \deg(\text{id}, U_1, 0) = \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1, 0) \quad . \quad \text{q.e.d.}$$

(4.3) Bemerkung: Läßt man in (LS) die Konklusion $\lambda \leq 1$ zu, so existiert zwar der Abbildungsgrad von $\text{id} - F_2 \circ F_1$ bezüglich 0 nicht mehr, aber $F_2 \circ F_1$ besitzt trotzdem einen Fixpunkt (nämlich auf dem Rande von U_1).

Ersetzt man (LS) durch (LS') :

Für alle $x \in \partial U_1$ und $\lambda \geq 0$ ist $\{x(1+\lambda)\} \cap F_2 \circ F_1(x) = \emptyset$,
so bleibt die Konklusion von (4.2) richtig.

Mit Hilfe von (4.2) beweist man leicht die folgenden Fix-

punktsätze. Ist $F_2 \circ F_1$ einwertig und kompakt, siehe [38]; ist $F_2 \circ F_1$ konvexwertig und kondensierend, siehe [47]; ist $F_2 \circ F_1$ eine konvexwertige und auf der Einheitskugel eines Banachraumes definierte kompakte Abbildung, siehe [29].

(4.4) Korollar: Sei E normiert, E' ein LCTVS und $U_1 = K(0, r)$, $r > 0$, eine offene Kugel um den Nullpunkt. Sind F_1, F_2 bezüglich 0 komponierbar und kompakt und erfüllt $F_2 \circ F_1$ eine der folgenden Bedingungen:

- (i) $F_2 \circ F_1(\partial U_1)^- \subset U_1$, (Rothe)
 - (ii) Zu jedem $x \in \partial U_1$ gibt es ein $\lambda > 0$ mit $(1 - \lambda)x + F_2 \circ F_1(x) \subset U_1^-$,
 - (iii) $\text{dist}(x, F_2 \circ F_1(x))^2 \geq \sup_{y \in F_2 \circ F_1(x)} \|y\|^2 - \|x\|^2$, $\forall x \in \partial U_1$ (Altman),
- so besitzt $F_2 \circ F_1$ mindestens einen Fixpunkt in U_1 .

Beweis: Daß die Rothe-Bedingung die Randbedingung LS impliziert, ist trivial.

Zum Beweis von (ii) nehmen wir für ein $x_0 \in \partial U_1$ und ein $\mu \in \mathbb{R}$ die Inklusion $\mu x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0)$ an. Nach Voraussetzung existiert dann ein $\lambda > 0$ mit:

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda)x_0 + \lambda F_2 \circ F_1(x_0) \subset U_1^- \\ \Rightarrow & (1 - \lambda)x_0 + \lambda \mu x_0 \in U_1^- \\ \Rightarrow & \|(1 - \lambda)x_0 + \lambda \mu x_0\| \leq r \\ \Rightarrow & 1 - \lambda + \lambda \mu \leq 1 \\ \Rightarrow & \mu \leq 1. \end{aligned}$$

(4.2) und die Bemerkung (4.3) liefern dann die Existenz eines Fixpunktes.

- (iii) Sei $\lambda x_0 \in F_2 \circ F_1(x_0)$. Wegen $\text{dist}(x_0, F_2 \circ F_1(x_0)) \leq d(x_0, \lambda x_0)$ und $\sup_{y \in F_2 \circ F_1(x_0)} \|y\|^2 \geq \|\lambda x_0\|^2$ folgt aus (iii): $\|x_0\|^2(1 - \lambda)^2 \geq \lambda^2 \|x_0\|^2 - \|x_0\|^2 = \|x_0\|^2(\lambda^2 - 1)$, d.h. $1 > \lambda$.
q.e.d.

Aus (4.4) (i) erhält man leicht eine Verallgemeinerung des Schauderschen Fixpunktsatzes. Sind die F_i azyklisch-wertige kompakte Operatoren in Banachräumen, vergleiche man [25], [49]; ist $F_2: \overline{\text{co}}(F_1(U_1)) \longrightarrow E$ einwertig und stetig, siehe [37] und [48].

(4.5) Korollar: Sei E normiert, E' ein LCTVS und $C \subset E$ abgeschlossen, beschränkt und konvex. Sind F_1, F_2 komponierbar und kompakt mit $F_2 \circ F_1(C) \subset C$, so besitzt $F_2 \circ F_1$ in C einen Fixpunkt.

Beweis: Nach einem bekannten Resultat von J. Dugundji ist C ein Retrakt von E . Es existiert also eine Retraktion $r: E \longrightarrow C$. Da C beschränkt ist, gibt es ein $r > 0$ mit $C \subset K(0, r)$. Es folgt: $F_2 \circ F_1 \circ r(K(0, r)^-) \subset F_2 \circ F_1(C) \subset C \subset K(0, r)$. Nach (4.4) gibt es dann ein $x_0 \in K(0, r)$ mit $x_0 \in F_2 \circ F_1 \circ r(x_0)$. Wegen $x_0 \in C$ ist $r(x_0) = x_0$. q.e.d.

(4.6) Theorem: Sei E normiert, E' ein LCTVS und $U_1 \subset E$ eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Nullumgebung. Für die bezüglich 0 komponierbaren und kompakten Operatoren F_1 und F_2 gelte: $\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) \neq 0$. Dann existiert zu jedem $x \in \partial U_1$ ein $\lambda > 0$ und ein $x_\lambda \in \partial U_1$ mit:

$$\lambda x \in x_\lambda - F_2 \circ F_1(x_\lambda)$$

Beweis: Wir beweisen die logische Kontraposition von (4.6), nehmen also an, es gilt:

$$\mathbb{R}^+ \cdot p \cap (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1) = \emptyset,$$

für ein $p \in \partial U_1$ und $\mathbb{R}^+ = \{\lambda; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$. In [38] hat Ma die Existenz eines $\delta > 0$ gezeigt mit:

$$O_{\delta}(\mathbb{R}^+ p) \cap (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1) = \emptyset.$$

Zu diesem δ gibt es gemäß (1.12) eine endlichdimensionale ohs und kompakte Abbildung $G_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ mit

$$G_2(y) \subset O_{\delta}(F_2(y)) \quad ; \quad F_2(y) \subset O_{\delta}(G_2(y)) \quad , \quad \forall y \in U_2 \quad \text{und}$$

$G_2(U_2) \cup \{p\} \subset E_1, E_1 \subset E$ endlichdimensional. Wir zeigen jetzt die Existenz einer Nullumgebung $V \subset E'$ mit:

$$(a) \quad G_2^-(x + R_0^+ \cdot p) \cap F_1(x) + V = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1.$$

Wir gehen indirekt vor. Dann gibt es zu jeder Nullumgebung V ein $x_V \in \partial U_1$ mit

$$G_2^-(x_V + R_0^+ \cdot p) \cap F_1(x_V) + V \neq \emptyset.$$

Zu jedem V gibt es also x_V und z_V mit:

$x_V + R_0^+ \cdot p \cap G_2(z_V) \neq \emptyset$ und $z_V \in F_1(x_V) + V$, es gibt also y_V mit $y_V = x_V + \mu_V p$ und $y_V \in G_2(z_V)$. Da G_2 kompakt ist, konvergiert das Netz (y_V) gegen ein $y_0 \in G_2(U_2)^-$. Da U_1 beschränkt ist, konvergiert auch x_V gegen ein x_0 und damit auch $\mu_V p$. Es ist daher $y_0 = x_0 + \mu_0 p$. Da $z_V \in F_1(x_V) + V$, existieren $a_V \in F_1(x_V)$ mit $z_V = a_V + v$. Da F_1 kompakt ist, konvergieren die a_V und zwar gegen ein z_0 , also konvergiert auch z_V gegen z_0 und es folgt: $z_0 \in F_1(x_0)$, $y_0 \in G_2(z_0) \implies x_0 + \mu_0 p \in G_2(F_1(x_0))$, was jedoch im Widerspruch zur Wahl von G_2 steht, damit ist (a) bewiesen.

Sei nun V eine Nullumgebung in E' , die gemäß (a) existiert und für die gilt $F_1(U_1) + V \subset U_2$. Zu diesem V wählen wir eine endlichdimensionale und kompakte ohs Abbildung $G_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E')$ mit $G_1(x) \subset F_1(x) + V$. Wegen

$$O_{3\delta}(R^+p) \cap (\text{id} - G_2 \circ G_1)(\partial U_1) = \emptyset$$

sind G_1 und G_2 bezüglich 0 komponierbar und (3.3) liefert:

$$(b) \quad \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg((\text{id} - G_2 \circ G_1)|_{(U_1 \cap E_1)}, U_1^0 \cap E_1, 0)$$

Ist $E_2 \subset E'$ ein endlichdimensionaler Raum, der $G_1(U_1)$ enthält, so gibt es nach (2.4) stetige und bezüglich 0 kom-

ponierbare Abbildungen $K_1: U_1 \cap E_1 \longrightarrow \text{Conv}(U_2 \cap E_2)$ und $K_2: U_2 \cap E_2 \longrightarrow \text{Conv}(E_1)$ mit: $K_2 \circ K_1(x) \subset O_{2\delta}(G_2 \circ G_1(x))$, für alle $x \in U_1 \cap E_1$. Sind k_1 und k_2 die zugehörigen Schwerpunktsabbildungen, so ist wegen

$$(c) \quad O_\delta(\mathbb{R}^+, p) \cap (\text{id} - k_2 \circ k_1)(\partial(U_1 \cap E_1)) = \emptyset$$

und (2.6) :

$$\deg((\text{id} - G_2 \circ G_1)|_{(U_1 \cap E_1)}, U_1^0 \cap E_1, 0) = \deg((\text{id} - k_2 \circ k_1)|_{(U_1 \cap E_1)}, U_1^0 \cap E_1, 0)$$

Durch $h(x, t) = (1 - t)k_2 \circ k_1(x) + t(x - p)$ wird eine stetige Homotopie zwischen $k_2 \circ k_1$ und $\text{id} - p$ auf $U_1 \cap E_1$ definiert. Gäbe es ein Paar $(x_0, t_0) \in \partial(U_1 \cap E_1) \times I$ mit $x_0 = h(x_0, t_0)$, so würde folgen:

$$\begin{aligned} x_0 &= (1 - t_0)k_2 \circ k_1(x_0) + t_0(x_0 - p) \\ \Rightarrow t_0 p &= (1 - t_0)(x_0 - k_2 \circ k_1(x_0)) \end{aligned}$$

Da p nach Voraussetzung ungleich Null ist, muß $t_0 \neq 1$ sein, also folgt mit $\lambda = \frac{t_0}{1-t_0}$: $\lambda p = (\text{id} - k_2 \circ k_1)(x_0)$, was jedoch im Widerspruch zu (c) steht. Die Homotopieinvarianz des Brouwerschen Abbildungsgrades (1.16) liefert zusammen mit (b) :

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) &= \deg_{\text{Br}}((\text{id} - k_2 \circ k_1)|_{(U_1 \cap E_1)}, U_1^0 \cap E_1, 0) \\ &= \deg_{\text{Br}}(p, U_1^0 \cap E_1, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

Für einwertige kondensierende Operatoren vergleiche man [43]; ist E lokalkonvex und ist $F_2 \circ F_1$ ein kompakter und konvexwertiger Operator siehe [38]; ist E ein Banachraum und $F_2 \circ F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ kondensierend vergleiche man [47].

Im Folgenden wollen wir Kriterien angeben, wann die zu komponierbaren Operatoren gehörenden Vektorfelder offene Abbildungen sind. Als Spezialfall erhält man daraus eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Gebietsinvarianztheorems.

(4.7) Lemma: Sei X eine beliebige Teilmenge von E und $p \in X$. Es existiere eine offene und symmetrische Nullumgebung $U_1 \subset E$ und bezüglich p komponierbare kompakte Operatoren $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E')$ und $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ (U_2 sei eine $F_1(U_1)^-$ enthaltende offene Menge) mit:

$$(i) \quad (\text{id} - F_2 \circ F_1)(U_1^-) \subset X$$

$$(ii) \quad \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1, p) \neq 0.$$

Dann ist p innerer Punkt von X .

Beweis: Da F_2 und F_1 bezüglich p komponierbar sind, existiert eine offene und konvexe, kreisförmige Nullumgebung V mit: $(p + V) \cap (\text{id} - F_2 \circ F_1)(\partial U_1) = \emptyset$.

Da V konvex ist, liegen für beliebiges $v \in V$ die Punkte p und $p+v$ in derselben Zusammenhangskomponente, (3.9) liefert dann:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1, p) = \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1, p + v) \neq 0.$$

Nach (4.1) existiert ein Vektor $x_v \in U_1$ mit:

$$p + v \in x_v - F_2 \circ F_1(x_v).$$

Wegen (i) ist dann $p + v \in X$ und daher auch $p + V \subset X$, p ist also innerer Punkt von X .

q.e.d.

(4.8) Definition: Eine ohs Abbildung $F: U \longrightarrow E$, $U \subset E$, heißt lokal-nicht-entgegengesetzt, wenn es zu jedem $p \in U^0$ eine offene und symmetrische Nullumgebung V so gibt, daß $p + V^- \subset U^0$ und gilt: Für alle $x \in p + \partial V$ und $\lambda \geq 0$ ist

$$\lambda(x - p) \notin F(x) - F(p).$$

(4.9) Theorem: Seien E, E' LCTVS, $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E')$, $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ kompakt und ohs mit $F_1(U_1)^- \subset U_2^0$, ist dann $\text{id} - F_2 \circ F_1$ lokal-nicht-entgegengesetzt, so ist $\text{id} - F_2 \circ F_1$ eine offene Abbildung.

Beweis: Sei $A \subset U_1$ offen und $p \in (\text{id} - F_2 \circ F_1)(A)$.

Dann existiert ein $z \in A$ mit

$$(a) \quad p \in z - F_2 \circ F_1(z)$$

Da z innerer Punkt ist, existiert eine offene, kreisförmige und konvexe Nullumgebung $V \subset E$ mit $z + V^- \subset A$, sodaß für alle $x \in z + \partial V$ und $\lambda \geq 0$ gilt:

$$(b) \quad \lambda(z - x) \notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)(x) - (\text{id} - F_2 \circ F_1)(z).$$

Setzt man $G_1(x) = F(x+z)$ und $G_2(y) = F_2(y) + z$, für alle $x \in V^-$ und $y \in U_2$, so sind G_1 und G_2 bezüglich p komponierbar. Gäbe es nämlich ein $x_0 \in \partial V$ mit $p \in x_0 - G_2 \circ G_1(x_0)$, so würden die Voraussetzungen über $\text{id} - F_2 \circ F_1$ implizieren:

Für $x := z + x_0 \in z + \partial V$ und $\lambda \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} -\lambda x_0 = \lambda(z - x) &\notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)(x) - (\text{id} - F_2 \circ F_1)(z) \\ \implies 0 &\notin (\text{id} - F_2 \circ F_1)(x) - (\text{id} - F_2 \circ F_1)(z) \\ &= x_0 - G_2 \circ G_1(x_0) - (z - F_2 \circ F_1(z)). \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch, da p sowohl im rechten Summanden (nach (a)) als auch im linken Summanden liegt. Mit Hilfe von (a) und (b) zeigt man nun analog, daß für $\lambda \geq 0$ und $x \in \partial V$ stets gilt:

$$x(1 + \lambda) \notin G_2 \circ G_1(x) + p.$$

Nach (4.2) zusammen mit der nachfolgenden Bemerkung gilt dann: $\deg(\text{id} - G_2 \circ G_1, V, p) = 1$. Nach dem vorangegangenen

Lemma muß p innerer Punkt von $(\text{id} - G_2 \circ G_1)(V)$ sein.

Wegen $(\text{id} - G_2 \circ G_1)(V) = (\text{id} - F_2 \circ F_1)(z + V) \subset (\text{id} - F_2 \circ F_1)(A)$

ist p auch innerer Punkt von $(\text{id} - F_2 \circ F_1)(A)$. Da p beliebig gewählt war, ist die Menge also offen. q.e.d.

Berücksichtigt man (1.10), so folgt aus (4.9) sofort

(4.10) Korollar: Gelten die Voraussetzungen von (4.9) mit E anstelle von U_1 , so ist $\text{id} - F_2 \circ F_1$ surjektiv.

(4.11) Bemerkung: Wir wollen nun zeigen, daß unter den Voraussetzungen von (4.9) das Vektorfeld $\text{id} - F_2 \circ F_1$ Gebiete in Gebiete überführt. Dazu beweisen wir:

Ist X ein topologischer Raum, $U \subset X$ zusammenhängend und $F: U \longrightarrow X$ ohs mit kompakten und zusammenhängenden Bildern, so ist $F(U)$ wieder zusammenhängend.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $F(U)$ relativ zusammenhängend ist. Wir nehmen an, daß es zwei relativ separierte offene Mengen A und B gibt mit: $F(U) \subset A \cup B$, $F(U) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $F(U) \cap A \neq \emptyset$ und $F(U) \cap B \neq \emptyset$. Da $F(x)$ zusammenhängend ist, gilt für alle $x \in U$:

(a) Entweder $F(x) \subset A$ oder $F(x) \subset B$

Da F ohs ist, sind $F^+(A)$ und $F^+(B)$ offen in U .

Mit Hilfe von (a) prüft man sofort nach, daß $F^+(A \cup B) \subset F^+(A) \cup F^+(B)$ gilt. Folglich ist: $U \subset F^+(F(U)) \subset F^+(A \cup B) \subset F^+(A) \cup F^+(B)$

Wir nehmen nun an, es existiert ein $x \in U$ mit:

$x \in F^+(A) \cap F^+(B)$. Dann ist auch $x \in F^-(A) \cap F^-(B)$ und es gibt $a \in A$, $b \in B$ mit $x \in F^-(a) \cap F^-(b)$ oder $a, b \in F(x)$. Das widerspricht jedoch (a), folglich ist

$$U \cap (F^+(A) \cap F^+(B)) = \emptyset,$$

$$U \subset F^+(A) \cup F^+(B) \quad \text{und}$$

$$U \cap F^+(A) \neq \emptyset, \quad U \cap F^+(B) \neq \emptyset.$$

Demnach ist auch U nicht relativ zusammenhängend, womit die Behauptung bewiesen ist.

§5 PRODUKTEIGENSCHAFTEN DES ABBILDUNGSGRADES

Als Spezialfall des folgenden Theorems erhält man einen Zusammenhang zwischen dem in §3 definierten Abbildungsgrad und den Abbildungsgraden für kompakte ohs Vektorfelder, wie sie etwa in [32] und [38] behandelt werden.

Wir benötigen zunächst ein allgemeines Resultat über die Fixpunktmenge stetiger Funktionen.

(5.1) Lemma: Seien U, U' Teilmengen der topologischen T_2 -Räume X und X' , $f: U \longrightarrow U'$, $g: U' \longrightarrow U$ stetig. Dann gelten:

$$(i) \quad f(\mathcal{F}(g \circ f)) = \mathcal{F}(f \circ g) \quad ; \quad g(\mathcal{F}(f \circ g)) = \mathcal{F}(g \circ f) \quad .$$

$$(ii) \quad g \circ f \big|_{\mathcal{F}(g \circ f)} = \text{id} \big|_{\mathcal{F}(g \circ f)} \quad ; \quad f \circ g \big|_{\mathcal{F}(f \circ g)} = \text{id} \big|_{\mathcal{F}(f \circ g)} \quad .$$

Beweis: Der Beweis von (ii) ist trivial.

(i) Sei $z \in f(\mathcal{F}(g \circ f))$. Dann existiert ein $x \in U$ mit

$$x = g(f(x)) \quad \text{und} \quad z = f(x)$$

$$\implies \quad z = f(x) = f(g(f(x)))$$

$$\implies \quad z \in \mathcal{F}(f \circ g) \quad .$$

Die andere Inklusion ergibt sich aus (ii):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ g) &= \text{id} \big|_{\mathcal{F}(f \circ g)} (\mathcal{F}(f \circ g)) \\ &= f \circ g (\mathcal{F}(f \circ g)) \subset f(\mathcal{F}(g \circ f)) \quad . \end{aligned}$$

Aus Symmetrieeigenschaften ergibt sich die zweite Gleichheit ganz analog. q.e.d.

(5.2) Theorem: Es seien U_1, U_2 abgeschlossene Teilmengen von E resp. E' mit nichtleerem Inneren. $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E')$ und $F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ seien kompakt und ohs mit:

(i) $F_1(U_1)^- \subset U_2^0$ und $F_2(U_2)^- \subset U_1^0$.

Dann gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - F_1 \circ F_2, U_2^0, 0).$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt, daß sowohl F_1 und F_2 als auch F_2 und F_1 bezüglich 0 komponierbar sind, also existieren beide Abbildungsgrade.

1. Fall: U_1 und U_2 seien kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ resp. des $\mathbb{R}^m$. Wegen (i) und (2.2) finden wir positive

Zahlen δ_2 und δ_1 mit:

$$\{x\} \cap O_{\delta_2}(F_2 \circ F_1(x)) = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1 \quad \text{und}$$

$$\{y\} \cap O_{\delta_1}(F_1 \circ F_2(y)) = \emptyset, \quad \forall y \in \partial U_2.$$

$G_1^!$ und $G_2^!$ seien die entsprechenden δ_1 - und δ_2 -Approximationen:

$$G_1^!(x) \subset O_{\delta_1}(F_1(x)) \quad \text{und} \quad G_2^!(y) \subset O_{\delta_2}(F_2(y)).$$

Nach (2.3) gibt es positive Zahlen ε_1 und ε_2 mit:

$$G_2^! \cap O_{\varepsilon_1}(F_1(x)) = \emptyset, \quad \forall x \in \partial U_1 \quad \text{und}$$

$$G_1^! \cap O_{\varepsilon_2}(F_2(y)) = \emptyset, \quad \forall y \in \partial U_2 \quad \text{sowie}$$

$$O_{\varepsilon_1}(F_1(U_1)) \subset U_2 \quad \text{und} \quad O_{\varepsilon_2}(F_2(U_2)) \subset U_1.$$

Seien G_1'' und G_2'' die entsprechenden ε_1 - und ε_2 -Approximationen von F_1 resp. F_2 :

$$G_1''(x) \subset O_{\varepsilon_1}(F_1(x)) \quad \text{und} \quad G_2''(y) \subset O_{\varepsilon_2}(F_2(y)).$$

Sind $g_1^!$ resp. g_1'' die zugehörigen Schwerpunktsabbildungen so folgt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - g_2^! \circ g_1^!, U_1^0, 0) \quad \text{und}$$

$$\deg(\text{id} - F_1 \circ F_2, U_2^0, 0) = \deg(\text{id} - g_1'' \circ g_2'', U_2^0, 0).$$

Wir setzen nun:

$$G_1(x) = G_1^!(x) \cap G_1''(x) \quad \text{und} \quad G_2(y) = G_2^!(y) \cap G_2''(y)$$

G_1 und G_2 sind dann stetige Abbildungen mit kompakten und konvexen Bildern und es gilt für $\rho_i = \min \{ \delta_i, \varepsilon_i \}$:

$$G_1(x) \subset O_{\rho_1}(F_1(x)) \quad \text{und} \quad G_2(y) \subset O_{\rho_2}(F_2(y)) .$$

Sind g_1 und g_2 die entsprechenden Schwerpunktsabbildungen, so gilt:

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id} - g_2 \circ g_1, U_1^0, 0) \quad \text{und}$$

$$\deg(\text{id} - F_1 \circ F_2, U_2^0, 0) = \deg(\text{id} - g_1 \circ g_2, U_2^0, 0) .$$

(5.1) und (1.21) liefern dann die Gleichheit beider rechten Seiten.

2.Fall: Seien nun U_1 und U_2 abgeschlossene Mengen mit nichtleerem Inneren. Da die auftretenden Abbildungen kompakt sind, existieren offene und beschränkte Mengen V_1 und V_2 mit :

$$F_2 \circ F_1(U_1) \subset V_1 \quad \text{und} \quad F_1 \circ F_2(U_2) \subset V_2 .$$

(2.13) und der 1.Fall ergeben dann:

$$\begin{aligned} \deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) &= \deg((\text{id} - F_2 \circ F_1)|_{(U_1 \cap V_1)^-}, U_1^0 \cap V, 0) \\ &= \deg((\text{id} - g_2 \circ g_1)|_{(U_1 \cap V_1)^-}, U_1^0 \cap V_1, 0) \\ &= \deg((\text{id} - g_1 \circ g_2)|_{(U_2 \cap V_2)^-}, U_2^0 \cap V_2, 0) \\ &= \deg((\text{id} - F_1 \circ F_2)|_{(U_2 \cap V_2)^-}, U_2^0 \cap V_2, 0) \\ &= \deg(\text{id} - F_1 \circ F_2, U_2^0, 0) . \end{aligned}$$

3.Fall: Im allgemeinen Fall betrachtet man statt δ und ε kreisförmige und konvexe Nullumgebungen, zu denen sich ohs kompakte und endlichdimensionale Abbildungen gemäß (3.3) finden lassen, die die Voraussetzungen von (5.2) erfüllen. Die Behauptung läßt sich dann auf den 2.Fall zurückführen.
q.e.d.

Die Kommutativitätseigenschaft (5.3) des Abbildungsgrades ist von Calvert in [8] für endlichdimensionale Räume bewiesen worden. Sind die F_i einwertig vergleiche man die Arbeiten [27], [52a], sowie die Monographie [36a].

Ist etwa F_1 einwertig, so ist $F_2 \circ F_1(x)$ stets konvex; der Grad des entsprechenden Vektorfeldes ist dann im Sinne von [32] oder [38] zu verstehen.

Mit Hilfe von (4.4) und (5.2) erhält man sofort:

(5.3) Korollar: Zusätzlich zu den Voraussetzungen von (5.2) gelte: E sei normiert und $U_1 = K(0, r)$, $r > 0$. Dann besitzt $F_1 \circ F_2$ in U_2^0 einen Fixpunkt.

(5.4) Theorem: Seien E_i' und E_i'' , $i = 1, 2$, LCTVS, $U_i' \subset E_i'$, $U_i'' \subset E_i''$ abgeschlossen und die kompakten ohs Operatoren $F_1': U_1' \longrightarrow \text{Conv}(E_2')$, $F_2': U_2' \longrightarrow \text{Conv}(E_1')$, $F_1'': U_1'' \longrightarrow \text{Conv}(E_2'')$ und $F_2'': U_2'' \longrightarrow \text{Conv}(E_1'')$ seien bezüglich $0' \in E_1'$ resp. $0'' \in E_1''$ komponierbar. Setzt man $U_i = U_i' \times U_i''$, $E_i = E_i' \times E_i''$ und $F_1(x) = F_1'(x') \times F_1''(x'')$ und $F_2(y) = F_2'(y') \times F_2''(y'')$, wobei $x = (x', x'')$ und $y = (y', y'')$ Elemente aus U_1 resp. U_2 sind, so gilt:

(i) F_1 und F_2 sind bezüglich $0 \in E_1$ komponierbar und es ist:

$$(\text{id} - F_2 \circ F_1)(x) = (\text{id}' - F_2' \circ F_1')(x') \times (\text{id}'' - F_2'' \circ F_1'')(x'').$$

(ii) $\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg(\text{id}' - F_2' \circ F_1', U_1'^0, 0') \cdot$

$$\cdot \deg(\text{id}'' - F_2'' \circ F_1'', U_1''^0, 0'').$$

Beweis: Wegen $\partial U_1 = \partial(U_1' \times U_1'') = (\partial U_1' \times U_1'') \cup (U_1' \times \partial U_1'')$

folgt Behauptung (i) sofort aus den Voraussetzungen.

1. Fall: Seien zunächst U' und U'' kompakte Teilmengen

endlichdimensionaler Räume. Es existieren positive Zahlen

$$\delta', \delta'' \text{ mit: } \{x'\} \cap O_{4\delta'}(F_2' \circ F_1'(x')) = \emptyset, \forall x' \in \partial U_1'$$

$$\text{und } \{x''\} \cap O_{4\delta''}(F_2'' \circ F_1''(x'')) = \emptyset, \forall x'' \in \partial U_1''.$$

Ist $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, so gibt es stetige Abbildungen G_2' und G_2'' mit $G_2'(y') \subset O_\delta(F_2'(y'))$ und $G_2''(y'') \subset O_\delta(F_2''(y''))$

$$\implies G_2(y) := G_2'(y') \times G_2''(y'') \subset O(F_2'(y')) \times O(F_2''(y''))$$

$$\subset O_{2\delta}(F_2(y)) \quad .^1)$$

Wegen (2.3) und der gleichmäßigen Stetigkeit von G_2'' und G_2' auf U_2' resp. U_2'' gibt es $\varepsilon', \varepsilon''$ und $\rho', \rho'' > 0$

$$\text{mit: } G_2'^-(x') \cap O_{\varepsilon'}(F_1'(x')) = \emptyset, \forall x' \in \partial U_1',$$

$$G_2''^-(x'') \cap O_{\varepsilon''}(F_1''(x'')) = \emptyset, \forall x'' \in \partial U_1'', \text{ und}$$

$$G_2'(O_{2\rho'}(F_1'(U_1'))) \subset O_\delta(G_2' \circ F_1'(U_1')),$$

$$G_2''(O_{2\rho''}(F_1''(U_1''))) \subset O_\delta(G_2'' \circ F_1''(U_1'')) \text{ und}$$

$$O_{\varepsilon'}(F_1'(U_1')) \subset U_2'; \quad O_{\varepsilon''}(F_1''(U_1'')) \subset U_2''.$$

Zu $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon'', \rho', \rho''\}$ gibt es nun stetige Abbildungen G_1' und G_1'' mit:

$$G_1'(x') \subset O_\varepsilon(F_1'(x')) \text{ und } G_1''(x'') \subset O_\varepsilon(F_1''(x'')).$$

Wegen $G_1(x) = G_1'(x') \times G_1''(x'') \subset O_{2\delta}(F_1(x))$ und

$$G_2' \circ G_1'(x') \subset O_{2\delta}(F_2' \circ F_1'(x')); \quad G_2'' \circ G_1''(x'') \subset O_{2\delta}(F_2'' \circ F_1''(x''))$$

folgt:

$$G_2 \circ G_1(x) \subset G_2(O_\varepsilon(F_1'(x') \times O_\varepsilon(F_1''(x''))))$$

$$\subset G_2'(O_\varepsilon(F_1'(x'))) \times G_2''(O_\varepsilon(F_1''(x''))))$$

$$\subset O_\delta(G_2' \circ F_1'(x')) \times O_\delta(G_2'' \circ F_1''(x''))$$

$$\subset O_{2\delta}(F_2' \circ F_1'(x')) \times O_{2\delta}(F_2'' \circ F_1''(x''))$$

$$\subset O_{4\delta}(F_2 \circ F_1(x)), \text{ also ist } G_2 \circ G_1 \text{ auf } \partial U_1$$

1) Wir machen im Folgenden ausgiebig von der Inklusion $O_\delta(A \times B) \subset O_\delta(A) \times O_\delta(B) \subset O_{2\delta}(A \times B)$, A, B kompakt, Gebrauch.

fixpunktfrei. Bezeichnen wir mit g_1', g_2' und g_1'', g_2'' die Schwerpunktsabbildungen von G_1', G_2' resp. G_1'', G_2'' , so ist definitionsgemäß:

$$\deg(\text{id}' - F_2' \circ F_1', U_1'^0, 0') = \deg_{\text{Br}}(\text{id}' - g_2' \circ g_1', U_1'^0, 0')$$

$$\deg(\text{id}'' - F_2'' \circ F_1'', U_1''^0, 0'') = \deg_{\text{Br}}(\text{id}'' - g_2'' \circ g_1'', U_1''^0, 0'')$$

Setzt man $g_1(x) = (g_1'(x'), g_1''(x''))$; $g_2(y) = (g_2'(y'), g_2''(y''))$, so folgt aus $g_2 \circ g_1(x) = (g_2' \circ g_1'(x'), g_2'' \circ g_1''(x''))$

$$\in G_2' \circ G_1'(x') \times G_2'' \circ G_1''(x'')$$

$$= G_2 \circ G_1(x) :$$

$$\deg(\text{id} - F_2 \circ F_1, U_1^0, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g_2 \circ g_1, U_1^0, 0) .$$

Damit ist die Behauptung von (5.4) auf (1.19) zurückgeführt.

2. Fall: Seien nun die Definitionsbereiche abgeschlossen, dann existieren offene und beschränkte Mengen V' und V'' mit $F_2' \circ F_1'(U_1') \subset V'$ und $F_2'' \circ F_1''(U_1'') \subset V''$

$$\Rightarrow F_2 \circ F_1(U_1) \subset V = V' \times V'' .$$

Für die Abbildungsgrade gilt dann:

$$\begin{aligned} \deg((\text{id}' - F_2' \circ F_1')|_{(U_1' \cap V')^-}, U_1'^0 \cap V', 0') &= \\ &= \deg((\text{id}' - g_2' \circ g_1')|_{(U_1' \cap V')^-}, U_1'^0 \cap V', 0') , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \deg((\text{id}'' - F_2'' \circ F_1'')|_{(U_1'' \cap V'')^-}, U_1''^0 \cap V'', 0'') &= \\ &= \deg((\text{id}'' - g_2'' \circ g_1'')|_{(U_1'' \cap V'')^-}, U_1''^0 \cap V'', 0'') . \end{aligned}$$

Berücksichtigt man (2.13) und

$$g_2 \circ g_1(x) \in G_2 \circ G_1(x) \subset O_{4\delta}(F_2 \circ F_1(x)) , \forall x \in (U_1 \cap V)^- ,$$

so folgt die Behauptung aus den im 1. Fall angestellten Überlegungen.

3. Fall: Entsprechend der Konstruktion zu (3.3) beweist man den lokalkonvexen Fall ganz analog zu den eben gemach-

ten Überlegungen.

q.e.d.

Sind die E'_i und E''_i Banachräume, die F'_i und F''_i azyklischwertig und erfüllen $F'_2 \circ F'_1$ und $F''_2 \circ F''_1$ eine (3.12) (iii) entsprechende Bedingung vergleiche man [8], sind $F'_2 \circ F'_1$ und $F''_2 \circ F''_1$ konvexwertig, siehe [38].

Wir wollen nun die Multiplikationseigenschaft des Abbildungsgrades beweisen. Dazu sind einige Vorbemerkungen nötig. Sind nämlich $F_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ und

$F_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ ohs kompakte Operatoren, sodaß $f_2 \circ f_1$, mit $f_i = \text{id} - F_i$, bildbar ist, so ist

$$f_2 \circ f_1(x) = x - F_1(x) - F_2(x - F_1(x)).$$

Da f_1 keine kompakte Abbildung ist, läßt sich die in §3 definierte Abbildungsgradtheorie i.A. nicht (siehe dazu (3.4)) auf $F_2 \circ f_1$ anwenden. Um die Multiplikationseigenschaft beweisen zu können, muß also erst dem Ausdruck

$$\deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0)$$

Sinn gegeben werden. Darüberhinaus sei daraufhingewiesen, daß die Multiplikationseigenschaft rein abbildungsgradtheoretischer Natur ist, da eine analoge Beziehung für den Fixpunktindex ja nicht existieren kann.

Wir betrachten zunächst den Fall $E = \mathbb{R}^n$. U_1, U_2 seien wie üblich abgeschlossene Mengen mit nichtleerem Inneren.

Analog zu (2.1) sagen wir, daß $f_i: U_i \longrightarrow \text{Conv}(E)$ bezüglich $0 \in E$ komponierbar sind, wenn für die kompakten Vektorfelder f_i gilt:

- (i) $f_1(U_1) \subset U_2^0$,
- (ii) $0 \notin f_2 \circ f_1(\partial U_1)$.

Wegen (ii) ist $f_2^{-1}(0) \cap f_1(\partial U_1) = \emptyset$. Da sowohl $f_2^{-1}(0)$ als auch $f_1(\partial U_1)$ abgeschlossen sind, existiert ein $\delta > 0$

mit: $f_2^-(0) \cap O_\delta(f_1(\partial U_1)) = \emptyset$ und $O_\delta(f_1(U_1)) \subset U_2$.

Ist F_1 der zu f_1 gehörende kompakte Operator, so folgt:

$$f_2^-(0) \cap (\{x\} - O_\delta(F_1(x))) = \emptyset, \forall x \in \partial U_1.$$

Zu diesem δ wählen wir eine stetige, F_1 approximierende

Abbildung $G_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(O_\delta(F_1(U_1)))$. Ist $\bar{g}_1$ die zu

G_1 gehörende Schwerpunktsabbildung, so sind wegen

$$\bar{g}_1(x) \in G_1(x) \subset O_\delta(F_1(x)) \quad f_2^-(0) \cap (\{x\} - \bar{g}_1(x)) = \emptyset, \text{ für}$$

alle $x \in \partial U_1$. Ist $g_1(x) = x - \bar{g}_1(x)$, so sind daher f_2 ,

g_1 bezüglich 0 komponierbar. Wir können daher setzen:

$$(5.5) \quad \deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0) = \deg_H(f_2 \circ g_1, U_1^0, 0)$$

Die rechte Seite bezeichnet dabei den Abbildungsgrad für

kompakte Vektorfelder im $\mathbb{R}^n$, wie er etwa in [32] definiert ist.

Zum Beweis der Wohldefiniertheit von (5.5) wählen wir eine weitere stetige Abbildung G_1' , die F_1 approximiert, sodaß f_2 und g_1' mit $g_1'(x) = x - \bar{g}_1'$, wobei $\bar{g}_1'$ die zu G_1' gehörige Schwerpunktsabbildung ist, bezüglich 0 komponierbar sind. Wir setzen $G_1''(x) = G_1(x) \cap G_1'(x)$, $\forall x \in U_1$, mit der entsprechenden Selektion $\bar{g}_1''$. Durch

$$h(x, t) = (1 - t)g_1(x) + t\bar{g}_1''(x) \quad \text{und}$$

$$h'(x, t) = (1 - t)g_1(x) + t\bar{g}_1'(x), \quad \forall (x, t) \in U_1 \times I$$

werden dann Homotopien zwischen g_1 , g_1'' und g_1' definiert.

Wegen $h(x, t) \in x - G_1(x)$ und $h'(x, t) \in x - G_1'(x)$ für

alle $(x, t) \in U_1 \times I$, sind h und f_2 resp. h' und f_2

bezüglich 0 komponierbar. Die Homotopieinvarianz des in

[32] definierten Grades (siehe 14.3°) liefert dann:

$$\deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0) = \deg_H(f_2 \circ g_1, U_1^0, 0)$$

$$= \deg_H(f_2 \circ h_0, U_1^0, 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \deg_H(f_2 \circ h_1, U_1^0, 0) \\
 &= \deg_H(f_2 \circ h'_0, U_1^0, 0) \\
 &= \deg_H(f_2 \circ h'_1, U_1^0, 0) \\
 &= \deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0)
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die entsprechende Situation im lokal-konvexen Raum E . Wegen $0 \notin f_2 \circ f_1(\partial U_1)$ existiert eine kreisförmige und konvexe Nullumgebung $V_2 \subset E$ mit:

$$3V_2 \cap f_2 \circ f_1(\partial U_1) = \emptyset$$

Zu diesem V_2 gibt es ein kompaktes Vektorfeld g_2 mit $g_2(x) \subset f_2(x) + V_2$ und $f_2(x) \subset g_2(x) + V_2$ sowie einen endlichdimensionalen Teilraum $E_n \subset E$ mit $g_2(U_2) \subset E_n$. Da $f_1(\partial U_1)$ abgeschlossen ist, gibt es eine weitere kreisförmige und konvexe Nullumgebung $V_1 \subset E$ mit:

$$g_2^{-1}(0) \cap f_1(\partial U_1) + V_1 = \emptyset \quad \text{und} \quad f_1(U_1) + V_1 \subset U_2.$$

Ist g_1 die V_1 -Approximation von f_1 , so ist

$$0 \notin g_2 \circ g_1(\partial(U_1 \cap E_n))$$

Wegen (5.5) können wir also setzen:

$$(5.6) \quad \deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0) = \deg(g_2 \circ g_1|_{(U_1 \cap E_n)^-}, U_1^0 \cap E_n, 0)$$

Daß (5.6) unabhängig von der Wahl der V_1 und V_2 ist, sieht man leicht: Sind nämlich W_1 und W_2 weitere kreisförmige und konvexe Nullumgebungen und g'_1, g'_2 die entsprechenden finiten Approximationen mit $g'_2 \circ g'_1(U_1) \subset E_m$ und $\deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0) = \deg(g'_2 \circ g'_1|_{(U_1 \cap E_m)^-}, U_1^0 \cap E_m, 0)$ so folgt

mit $g''_i(x) = g_i(x) \cap g'_i(x)$, daß die durch

$$h_i(x, t) = (1 - t)g_i(x) + tg''_i(x) \subset g_i(x) \quad \text{und}$$

$$h'_i(x, t) = (1 - t)g'_i(x) + tg''_i(x) \subset g'_i(x)$$

für alle $(x, t) \in (U_1 \cap E_p) \times I$ mit $E_n \cup E_m \subset E_p$, definierten Abbildungen bezüglich 0 komponierbare endlichdimensionale Homotopien zwischen g_i und g_i'' resp. g_i' und g_i'' sind. Ein ganz analoger Beweis zu (2.9) liefert dann die Homotopieinvarianz des in (5.5) definierten Grades und man erhält damit:

$$\begin{aligned} \deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0) &= \deg(g_2 \circ g_1|_{(U_1 \cap E_p)^-}, U_1^0 \cap E_p, 0) \\ &= \deg(g_2'' \circ g_1''|_{(U_1 \cap E_p)^-}, U_1^0 \cap E_p, 0) \\ &= \deg(g_2' \circ g_1'|_{(U_1 \cap E_p)^-}, U_1^0 \cap E_p, 0) . \end{aligned}$$

Hierbei ist noch zu beachten, daß wir von einer (2.14) analogen Aussage über die Reduktionseigenschaft des in (5.5) definierten Grades Gebrauch gemacht haben; damit ist aber die Wohldefiniertheit von (5.6) gezeigt.

(5.7) Theorem: Seien $f_1: U_1 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ und $f_2: U_2 \longrightarrow \text{Conv}(E)$ kompakte und bezüglich 0 komponierbare Vektorfelder und es gelte $0 \notin f_2(\partial U_2)$. Bezeichnet $\{U_2^j\}$ die Familie der offenen Zusammenhangskomponenten von $U_2 \setminus f_1(\partial U_1)$ und sind y_j feste aber beliebige Punkte von U_2^j , so gilt:

$$\deg(f_2 \circ f_1, U_1^0, 0) = \sum_{j \in J} \deg(f_2|_{U_2^j}, U_2^j, 0) \cdot \deg(f_1, U_1^0, y_j)$$

Dabei ist die Summe endlich und unabhängig von der speziellen Wahl der y_j .

Beweis: (5.7) beweist man wie Theorem 15.1 in [38], daher sei auf die Einzelheiten hier verzichtet.

q.e.d.

(5.8) Korollar: Sei A eine offene und nichtleere Teilmenge eines Banachraumes E , ist das kompakte Vektorfeld $f:A \longrightarrow \text{Conv}(E)$ injektiv, so ist für jedes $p \in f(A)$:

$$\deg(f, A, p) = \pm 1.$$

Beweis: Nach (1.3) ist f^- einwertig. Da f nach (1.10) sowohl offene als auch abgeschlossene Mengen wieder in offene und abgeschlossene Mengen überführt und $(f^-)^- = f$ ist, ist die einwertige Funktion $f^- = f^{-1}:f(A^-) \longrightarrow A^-$ auch stetig. Ist $f = \text{id} - F$, so wird durch

$$F'(x) = -F(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) - f^{-1}(x)$$

eine ohs und kompakte Abbildung mit kompakten konvexen Bildern definiert. Darüberhinaus ist $\text{id} - f^{-1}$ eine stetige Selektion von F' , insbesondere ist also f^{-1} ein stetiges kompaktes Vektorfeld mit:

$$f^{-1} \circ f = \text{id}|_{A^-} \quad \text{und} \quad f^{-1} = \text{id} - F_1, \quad F_1 \text{ kompakt.}$$

Nach dem Fortsetzungssatz von Dugundji läßt sich F_1 und damit auch f^{-1} auf ganz E fortsetzen, so daß die Fortsetzung - sie sei wieder mit F_1 bezeichnet - kompakt und stetig ist. f^{-1} kann daher als kompaktes Vektorfeld aufgefaßt werden, das auf ganz E definiert ist. Sei nun $p \in f(A)$. Da f injektiv ist, gibt es genau ein $x_p \in A$ mit $p \in f(x_p)$. Bezeichnen wir mit A_i die Komponenten von $E \setminus f(\partial A)$, so folgt aus (5.7):

$$\begin{aligned} 1 &= \deg(\text{id}, A, x_p) = \deg(f^{-1} \circ f, A, x_p) \\ &= \sum_{i \in I} \deg(f^{-1}, A_i, x_p) \cdot \deg(f, A, a_i), \end{aligned}$$

wobei $a_i \in A_i$ beliebig aber fest ist.

Da die A_i paarweise disjunkte Mengen sind, existiert genau ein Index i_0 mit $p \in A_{i_0}$ d.h. aber

$$\deg(f, A, a_{i_0}) = \deg(f, A, p)$$

Wir zeigen jetzt, daß für $i \neq i_0$ stets gilt:

$$\deg(f, A, a_i) \cdot \deg(f^{-1}, A_i, x_p) = 0$$

Wäre das nicht der Fall, so gäbe es einen Index $i \neq i_0$ mit

$$\deg(f, A, a_i) \neq 0 \quad \text{und} \quad \deg(f^{-1}, A_i, x_p) \neq 0$$

Es existiert also ein $q \in A_i$ mit $x_p = f^{-1}(q)$ oder

$q \in f(x_p)$, also ist $q \in f(A)$. Andererseits ist aber auch

$p \in f(x_p)$. Da $f(x_p)$ konvex ist, müssen p und q in der-

selben Zusammenhangskomponente liegen, was jedoch ein Widerspruch ist, Also folgt

$$1 = \deg(f^{-1}, A_{i_0}, x_p) \cdot \deg(f, A, p)$$

q.e.d.

Die Voraussetzung, daß E ein Banachraum - zumindest jedoch ein quasivollständiger, metrisierbarer Raum - ist, ist wesentlich. Denn um den Abbildungsgrad von $f^- \circ f$ bilden zu können, muß f^- auf einer Umgebung von $f(A)$ definiert sein. Wir müssen dazu Dugundji's Theorem anwenden und gleichzeitig sicherstellen, daß die Fortsetzung von f^- wieder ein kompaktes Vektorfeld ist.

§6 ASYMPTOTISCHE FIXPUNKTSÄTZE

In diesem Paragraphen wollen wir das "mod-p Theorem" von Sabreiko-Krasnosel'skij und Steinlein (siehe [36a] und [52]) auf mehrwertige kompakte Störungen der Identität übertragen. Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich dann asymptotische Fixpunktsätze herleiten. Unter asymptotischen Fixpunktsätzen wollen wir dabei Sätze verstehen, bei denen die Existenz von Fixpunkten eines Operators F aus Voraussetzungen an gewisse Iterierte von F hergeleitet werden kann.

Im folgenden sei E stets ein Banachraum. Ist $M \subset E$ und $F: M \longrightarrow E$ ein Operator, so nennen wir die Menge

$$\mathcal{F}_\varepsilon(F) = \{x; x \in M, \text{dist}(x, F(x)) < \varepsilon\}, (\varepsilon > 0)$$

die " ε -Fixpunktmenge" von F . Es ist klar, daß $\mathcal{F}_\varepsilon(F)$ die Fixpunktmenge von F , $\mathcal{F}(F)$ enthält. Ist $x_0 \in F(x_0)$, so ist auch $x_0 \in F^p(x_0)$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Insbesondere enthält $\mathcal{F}_\varepsilon(F^p)$ die Fixpunktmenge sämtlicher Iterierten F^n mit $1 \leq n \leq p$.

(6.1) Theorem: Sei $M \subset E$ abgeschlossen und $F: M \longrightarrow \text{Conv}(M)$ ein ohs kompakter Operator, der auf kompakten Teilmengen von M gleichmäßig ohs ist. Zu einer Primzahl p existiere eine offene und beschränkte Menge $U \subset M$ mit:

- (i) $F(\mathcal{F}(F^p|_{U^-})) \cup \mathcal{F}(F^p|_{U^-}) \subset U$.
- (ii) $F(M)^- \subset M^0$.

Dann existieren die Abbildungsgrade von $\text{id} - F$ und $\text{id} - F^P$ auf U bezüglich 0 und es gilt:

$$\deg(\text{id} - F^P, U, 0) = \deg(\text{id} - F, U, 0) \pmod{p}.$$

Beweis: Wir konstruieren geeignete einwertige Funktionen, die den Abbildungsgrad von $\text{id} - F^P$ und $\text{id} - F$ definieren und den Voraussetzungen von Satz 1 in [52] genügen.

I) Wir zeigen die Existenz zweier positiver Zahlen

$\varepsilon, \varepsilon' > 0$ mit:

$$a) \quad \mathcal{F}_{\varepsilon}(F^P|_{U^-}) \subset U \quad ; \quad b) \quad F(\mathcal{F}_{\varepsilon}(F^P|_{U^-}))^- \subset U.$$

ad a) Es sei für alle $\varepsilon > 0$ $\mathcal{F}_{\varepsilon}(F^P|_{U^-}) \cap \partial U \neq \emptyset$. Dann

existieren zu $\varepsilon = \frac{1}{n}$ x_n mit $x_n \in \partial U$ und $x_n \in \mathcal{F}_{\varepsilon}(F^P|_{U^-})$,

d.h. $\text{dist}(x_n, F^P(x_n)) < \frac{1}{n}$. Zur Folge (x_n) existiert dann

eine - o.B.d.A. konvergente - Folge (y_n) mit $y_n \in F^P(x_n)$

und $\text{dist}(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Da y_n gegen ein y_0 konvergiert, muß auch x_n gegen x_0 konvergieren. Wegen

der Abgeschlossenheit von F^P ist daher $y_0 \in F^P(y_0)$ und $y_0 \in \partial U$, was jedoch im Widerspruch zu (i) steht.

ad b) Wir machen die folgende Annahme:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{x_n} \bigvee_{y_n} \quad (x_n \in \partial U \wedge x_n \in F(y_n) \wedge \text{dist}(y_n, F^P(y_n)) < \frac{1}{n})$$

Wegen der Kompakteheit von F konvergiert x_n , gegebenenfalls eine Teilfolge, gegen ein $x_0 \in \partial U$. Zu y_n gibt es

z_n mit: $z_n \in F^P(y_n)$, $\lim(z_n) = z_0$ und $\text{dist}(y_n, z_n) < \frac{1}{n}$.

Also konvergiert auch y_n gegen z_0 und es folgt:

$x_0 \in F(z_0)$ und $z_0 \in F^P(z_0) \subset U^-$, also ist $z_0 \in \mathcal{F}(F^P|_{U^-})$

Nach (i) ist dann $F(z_0) \subset U$, andererseits ist aber $x_0 \in \partial U$.

Damit ist (I) bewiesen.

II) Es sei $E = E_n$ ein endlichdimensionaler Raum.

Aus I) folgt

$$0 \notin (\text{id} - F)(\partial U) \quad \text{und} \quad 0 \notin (\text{id} - F^p)(\partial U)$$

Es existieren also δ_1' , $\delta_p' > 0$ mit:

$$x \notin O_{\delta_1'}(F(x)) \quad \text{und} \quad x \notin O_{\delta_p'}(F^p(x)), \quad \forall x \in \partial U.$$

Da $F(\bigcup_{\varepsilon'}(F^p|_{U^-}))^-$ kompakt ist, existiert ein $\eta > 0$ mit:

$$O_\eta(F(\bigcup_{\varepsilon'}(F^p|_{U^-}))^-) \subset U.$$

Zu $\delta_p := \frac{1}{2} \min\{\delta_1', \delta_p', \varepsilon', \varepsilon, \eta\}$ gibt es dann gemäß (1.9) einen

stetigen und kompakten Operator $G_p: M \longrightarrow \text{Conv}(M)$ mit:

$$G_p(x) \subset O_{\delta_p}(F(x)), \quad F(x) \subset G(x)^0, \quad \forall x \in M$$

$$\implies x \notin G_p \circ F^{p-1}(x), \quad \forall x \in \partial U.$$

Da G_p auf $F^{p-1}(M)$ gleichmäßig stetig ist, existiert zu

δ_p ein δ_{p-1}' mit:

$$G_p(O_{\delta_{p-1}'}(y)) \subset O_{\delta_p}(G_p(y)), \quad \forall y \in F^{p-1}(M)$$

$$\implies G_p(O_{\delta_{p-1}'}(F^{p-1}(x))) \subset O_{\delta_p}(G_p \circ F^{p-1}(x)), \quad \forall x \in M.$$

Da nach (ii) $F(M)^-$ in M^0 enthalten ist, gibt es ein

$$\rho > 0 \quad \text{mit:} \quad O_\rho(F(M)) \subset M.$$

Zu $\delta_{p-1} := \frac{1}{2} \min\{\delta_{p-1}', \rho, \eta\}$ findet man wieder eine stetige

Abbildung G_{p-1} mit:

$$G_{p-1}(x) \subset O_{\delta_{p-1}'}(F(x)) \quad ; \quad F(x) \subset G_{p-1}(x)^0, \quad \forall x \in M.$$

$$\implies G_p \circ G_{p-1} \circ F^{p-2}(x) \subset G_p(O_{\delta_{p-1}'}(F^{p-1}(x))) \subset O_{\delta_p}(F^p(x))$$

$$\implies x \notin G_p \circ G_{p-1} \circ F^{p-2}(x), \quad \forall x \in \partial U.$$

Hat man auf diese Art $p-1$ stetige Approximationen G_p ,

$G_{p-1}, \dots, G_2$ von F konstruiert mit:

$$G_p \circ \dots \circ G_2 \circ F(x) \subset O_{\delta_p}(F^p(x)), \quad \forall x \in M.$$

so findet man zu δ_2 ein δ_1'' mit:

$$G_2(O_{\delta_1''}(F(x))) \subset O_{\delta_2}(G_2 \circ F(x)) \quad , \quad \forall x \in M \quad .$$

Wählt man dann zu $\delta_1 := \min\{\delta_1'', \eta, \rho\}$ ein entsprechendes G_1 mit $G_1(x) \subset O_{\delta_1}(F(x))$, $F(x) \subset G_1(x)^\circ$, $\forall x \in M$, so folgt:

$$G_p \circ \dots \circ G_1(x) \subset O_{2\delta_p}(F^p(x)) \subset O_\varepsilon(F^p(x))$$

Da $F(x)$ im Inneren von $G_1(x)$ enthalten ist, wird durch

$$G(x) = \bigcap_{i=1}^p G_i(x) \quad , \quad \forall x \in M$$

eine stetige, F approximierende Abbildung mit $G(x) \subset G_1(x)$ definiert, für die gilt:

$$(c) \quad G^p(x) \subset G_p \circ \dots \circ G_1(x) \subset O_\varepsilon(F^p(x)) \quad .$$

Bezeichnet g die stetige Schwerpunktsabbildung von G , so folgt schließlich:

$$\deg(\text{id} - F, U, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g, U, 0)$$

$$\deg(\text{id} - F^p, U, 0) = \deg_{\text{Br}}(\text{id} - g^p, U, 0) \quad .$$

Aus (c) folgt:

$$\mathcal{F}(g|_{U^-}) \subset \mathcal{F}(g^p|_{U^-}) \subset \mathcal{F}(G^p|_{U^-}) \subset \mathcal{F}_\varepsilon(F^p|_{U^-}) \subset U \quad \text{und}$$

$$g(\mathcal{F}(g^p|_{U^-})) \subset G(\mathcal{F}(G^p|_{U^-})) \subset F(\mathcal{F}_\varepsilon(F^p|_{U^-})) \subset U \quad .$$

Damit erfüllt g die Bedingungen (0.1) bis (0.4) von Satz 1 in [52] und man erhält:

$$\deg(\text{id} - g^p, U, 0) = \deg(\text{id} - g, U, 0) \text{ mod } p \quad ,$$

womit II) bewiesen ist.

III) Sei E nun ein Banachraum.

Aus (i) folgt die Existenz eines $\delta_p > 0$ mit:

$$O_{\delta_p}(0) \cap (\text{id} - F^p)(\partial U) = \emptyset \quad \text{und} \quad \delta_p \leq \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, \varepsilon', \eta, \rho\} \quad .$$

Wegen der gleichmäßigen Oberhalbstetigkeit von F auf

$F^{p-1}(M)$ gibt es zu δ_p ein $\delta_{p-1} > 0$ mit:

$$F(O_{2\delta_{p-1}}(F^{p-1}(x))) \subset O_{\delta_p}(F^p(x)) \quad , \quad \forall x \in M \quad \text{und}$$

$$2\delta_{p-1} \leq \varepsilon, \varepsilon', \eta, \rho \quad .$$

Auf diese Art erhält man nach $p-1$ Schritten zu δ_2 ein

$$\delta_1 \quad \text{mit:} \quad F(O_{\delta_1}(F(x))) \subset O_{\delta_2}(F^2(x)) \quad , \quad \forall x \in M$$

$$\text{und} \quad O_{\delta_1}(0) \cap (id - F)(\partial U) = \emptyset$$

$$\text{sowie} \quad 2\delta_1 \leq \varepsilon, \varepsilon', \eta, \rho \quad .$$

Zu $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$ existiert dann ein endlichdi-

mensionaler ohs und kompakter Operator $G: M \longrightarrow \text{Conv}(M \cap E_n)$

$$\text{mit:} \quad G(x) \subset O_{\delta}(F(x)) \quad ; \quad F(x) \subset O_{\delta}(G(x)) \quad , \quad \forall x \in M.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} G^p(x) &= G \circ \dots \circ G(x) \subset \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{p-1-\text{mal}}(O_{\delta}(F(x))) \\ &\subset \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{p-2-\text{mal}}(O_{\delta}(F(O_{\delta}(F(x))))) \\ &\subset G \circ \dots \circ G(O_{\delta_2}(F(O_{\delta}(F(x))))) \\ &\subset G \circ \dots \circ G(O_{2\delta_2}(F^2(x))) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\subset G \circ G(O_{2\delta_{p-2}}(F^{p-2}(x))) \\ &\subset G(O_{\delta}(F(O_{2\delta_{p-2}}(F^{p-2}(x))))) \\ &\subset G(O_{\delta_{p-1}}(F(O_{2\delta_{p-2}}(F^{p-2}(x))))) \\ &\subset G(O_{2\delta_{p-1}}(F^{p-1}(x))) \\ &\subset O_{2\delta_p}(F^p(x)) \quad . \end{aligned}$$

Weder G noch G^p besitzen also Fixpunkte auf $\partial U \cap E_n$ und

aus (3.3) folgt:

$$\deg(id - F^p, U, 0) = \deg((id - G^p)|_{(U \cap E_n)^-}, U \cap E_n, 0)$$

und $\deg(\text{Id} - F, U, 0) = \deg((\text{id} - G)|_{(U \cap E_n)^{-}}, U \cap E_n, 0)$.

Wegen $G^p(x) \subset O_\varepsilon(F^p(x))$ und $G(\mathcal{F}(G^p|_{U^-})) \subset O_\gamma(F(\mathcal{F}_\varepsilon(F^p|_{U^-})))$

erfüllt der Operator G die Voraussetzungen, die zum Nachweis von II) erforderlich waren ; damit ist aber (6.1) vollständig bewiesen.

q.e.d.

(6.2) Bemerkung: Die Voraussetzung, daß F auf kompakten Mengen gleichmäßig ohs ist, wird benötigt, um die Fixpunktmenge von F^p mit der Fixpunktmenge des approximierenden Operators G^p vergleichen zu können. Wie der Beweisschritt II) gezeigt hat, wird diese Voraussetzung im endlichdimensionalen Fall nicht gebraucht.

Die Voraussetzung, daß F M in sich abbildet, ist wesentlich. Um den Abbildungsgrad von $\text{id} - F^p$ definieren zu können, muß die entsprechende approximierende Abbildung komponentenweise mit sich selbst - also iterierbar sein, wozu die Prämisse (ii) benötigt wird. Eventuell könnte man hier mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Dugundji noch zu besseren Ergebnissen kommen.

Betrachtet man statt F^p iterierte F^n , wobei n eine ganzzahlige Potenz von p ist, so bleibt die Konklusion von (6.1) richtig.

Für stetige Selbstabbildungen auf kompakten ANR's haben Peitgen [46] und Browder [7] ein (6.1) analoges Ergebnis für die Lefschetz-Zahl bewiesen.

Aus (6.1) erhält man sofort

(6.3) Korollar: $F:M \longrightarrow \text{Conv}(M)$ erfülle die Voraussetzungen von (6.1). Ist $\deg(\text{id} - F^p, U, 0) \not\equiv 0 \pmod p$ so ist $\deg(\text{id} - F, U, 0) \not\equiv 0$, F besitzt also U einen Fixpunkt.

(6.4) Korollar: Sei $F: E \longrightarrow \text{Conv}(E)$ ein kompakter auf kompakten Mengen gleichmäßig ohs Operator. Für $0 < r < R$

$$\text{sei: } U_0 = \{x; x \in E, \|x\| < r\}$$

$$U_1 = \{x; x \in E, \|x\| < R\}$$

$$U = \{x; x \in E, r < \|x\| < R\}$$

Für eine Primzahl p gelte:

$$(i) \quad F(\mathcal{F}(F^p_U))^- \subset U.$$

(ii) Es gibt ein $x_1 \in \partial U_1$ mit

$$\mathbb{R}^+ x_1 \cap (\text{id} - F^p)(\partial U_1) = \emptyset.$$

$$(iii) \quad F^p(\partial U_0) \subset U_0.$$

Dann ist $\deg(\text{id} - F, U, 0) = -1 \bmod p$; F besitzt also einen Fixpunkt in U .

Beweis: Aus (ii) und (iii) folgt, daß F^p keine Fixpunkte auf ∂U hat, $\mathcal{F}(F^p_U)^-$ liegt also in U . Wegen (i) erfüllt F die Voraussetzungen von (6.1). (4.4) und (4.6) liefern: $\deg(\text{id} - F^p, U_1, 0) = 0$ und

$$\deg(\text{id} - F^p, U_0, 0) = 1.$$

Die Additivitätseigenschaft (3.7) ergibt dann:

$$0 = \deg(\text{id} - F^p, U_1, 0) = \deg(\text{id} - F^p, U_0, 0) + \deg(\text{id} - F^p, U, 0)$$

$$\Rightarrow -1 = \deg(\text{id} - F^p, U, 0) = \deg(\text{id} - F, U, 0) \bmod p \quad \text{q.e.d.}$$

(6.4) ist von Nussbaum [43] für einwertige beschränkte kondensierende Operatoren bewiesen worden. Fournier und Peitgen [22] haben analoge Ergebnisse (ohne die Bedingung (i)) für einwertige kompakte Operatoren erhalten.

ANHANG I

In (3.13) hatten wir den Begriff der zulässig zerlegbaren mehrwertigen Abbildung eingeführt. Wir schwächen diesen Begriff wie folgt ab:

(7.1) Definition: Sei U eine in einem lokalkonvexen Raum E abgeschlossene Menge mit nichtleerem Inneren. $F:U \longrightarrow E$ heißt bezüglich $p \in E$ zerlegbar, wenn es eine Familie $F_1, \dots, F_n$ ohs bezüglich p komponierbarer und kompakter Abbildungen gibt mit:

$$F(x) = F_n \circ \dots \circ F_1(x), \quad \forall x \in U.$$

Wir hatten schon bemerkt, daß eine solche Zerlegungsfolge i.A. nicht eindeutig ist; daher ist es auch nicht möglich, zerlegbaren Operatoren einen Abbildungsgrad im üblichen Sinne zu zuordnen. Hingegen können wir definieren:

$$(7.2) \quad \text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p) = \{ \text{deg}(\text{id} - F_n \circ \dots \circ F_1, U^0, p) ; \\ F_n, \dots, F_1 \text{ sind bez. } p \text{ komponier-} \\ \text{bar mit } F = F_n \circ \dots \circ F_1 \}$$

$\text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p)$ ist also eine Teilmenge der ganzen Zahlen. Gemäß (3.13) ist $\text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p)$ einelementig, wenn F bezüglich p zulässig zerlegbar ist, d.h. $F_n, \dots, F_2$ sind auf $F_{n-1}(U_{n-1}) \dots$ bzw. auf $F_1(U)$ gleichmäßig ohs und es gilt $p \notin \overline{\text{co}}((\text{id} - F)(\partial U))$.

Wir nennen zwei bezüglich p zerlegbare Abbildungen $F, G: U \longrightarrow E$ homotop, wenn es Zerlegungsfolgen $F_1, \dots, F_n$ und $G_1, \dots, G_n$ für F und G gibt, die bezüglich p

zulässig homotop sind.

Aus den bisher bewiesenen Tatsachen folgt sofort

(7.3) Theorem: Es seien $F, G: U \longrightarrow E$ bezüglich p zerlegbar, dann gelten:

(i) Sind F, G homotop, so ist

$$\text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p) \cap \text{Deg}(\text{id} - G, U^0, p) \neq \emptyset$$

(ii) Ist $\text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p) \neq \{0\}$, so besitzt F einen p -Punkt.

(iii) Sind $A, B \subset U$ mit $A^0 \cap B^0 = \emptyset$, $A \cup B = U$ abgeschlossen und ist $p \notin (\text{id} - F)(\partial A \cup \partial B)$ so ist:

$$\text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p) \subset \text{Deg}((\text{id} - F)|_A, A^0, p) + \text{Deg}((\text{id} - F)|_B, B^0, p)$$

(iv) Ist $C \subset E \setminus (\text{id} - F)(\partial U)$ eine Zusammenhangskomponente und ist F bezüglich jedem Element aus C zerlegbar, so gilt für $p, q \in C$:

$$\text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p) \cap \text{Deg}(\text{id} - F, U^0, q) \neq \emptyset$$

(v) Genügt F der Leray-Schauder Bedingung (vgl. (4.2)), so ist: $1 \in \text{Deg}(\text{id} - F, U^0, p)$.

ANHANG II

V.L.Klee, [35], nennt eine kompakte Abbildung $F:U \longrightarrow E$, U Teilmenge eines separierten topologischen Vektorraumes E , finit approximierbar, wenn es zu jeder Nullumgebung $V \subset E$ eine endlichdimensionale kompakte Abbildung F_V gibt mit:

$$F_V(x) \in F(x) + V \quad (\forall x \in U) \quad \text{und} \quad F_V(U) \subset E_V, \quad \dim E_V < \aleph_0.$$

E heißt dann zulässig, wenn für jede kompakte Menge $K \subset E$ die Identität auf K finit approximierbar ist, oder, was dasselbe ist, wenn für jedes $U \subset E$ jede kompakte Abbildung $F:U \longrightarrow E$ finit approximierbar ist. Nach (1.11) ist jeder lokalkonvexe Raum zulässig. Beispiele für nicht zulässige Räume sind bis jetzt noch nicht angegeben worden

In [30]¹⁾ ist eine Abbildungsgradtheorie für einwertige kompakte Vektorfelder in zulässigen Räumen angegeben worden; insbesondere eignen sich solche Räume zur Untersuchung nichtlinearer Gleichungen. Um (1.12) (und damit die Abbildungsgradtheorie) auf nicht lokalkonvexe Räume übertragen zu können, muß die Klasse der zulässigen Räume eingeschränkt werden:

(7.4) Definition: (cf. [17]) Sei $Z \subset E$. Eine Menge $X \subset Z$ heißt konvex-approximierbar in Z , wenn es zu jeder Nullumgebung V eine endlichdimensionale stetige Funktion $p_V: X \longrightarrow Z$ gibt, sodaß für jede konvexe Kombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - p_V(x_i)) \in V.$$

¹⁾ Siehe dazu auch die Note von W.Kaballo: Zum Abbildungsgrad in Hausdorffschen topologischen Vektorräumen, manuscripta math. 8 (1973), 209 - 216.

Z selbst heißt konvex-zulässig, wenn jede kompakte Menge $X \subset Z$ konvex-approximierbar in Z ist.

Jede konvex-approximierbare Menge ist offensichtlich finit-approximierbar, ob die Umkehrung gilt, ist hingegen unbekannt. Wie man leicht nachrechnet, ist wegen (1.11) jede kompakte Teilmenge K eines lokalkonvexen Raumes konvex-approximierbar in $\text{co}K$.

Ist nun $F:U \longrightarrow \text{Conv}(E)$ eine kompakte ohs Abbildung und ist E konvex-zulässig, so gibt es zu jeder Nullumgebung V eine endlichdimensionale kompakte und ohs Abbildung $F_V:U \longrightarrow \text{Conv}(E_V)$ mit:

$$(i) \quad F_V(x) \subset F_V(x) + V \quad (ii) \quad F_V(x) \subset F(x) + V$$

Nur beim Beweis der ersten Inklusion wird (7.4) benötigt, (ii) ist trivial. Nur läßt sich auf die übliche Weise ein Abbildungsgrad für $\text{id} - F$ definieren, wie in §3 läßt sich dieses Konzept dann auch auf komponierbare Operatoren übertragen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] AMANN, H./WEISS, S. : On the uniqueness of the topological degree
Math. Z. 130 (1973) 39-54
- [2] BERGE, C. : Espaces topologiques , fonctions multivoques
Dunod, Paris 1959
- [3] - : Théorie générale des jeux à n personnes
Gauthiers-Villars , Paris 1957
- [4] BOHNENBLUST, H.F./KARLIN, S. : On a theorem of Ville
Contributions to the theory of games, Ann.of Math.
studies , no. 24 (1950)
- [5] BORISOVIC/GEL'MAN/MUHAMADIEV/OBUCHOVSKIJ: On the rotation of multivalued vector fields
D.A.N. SSSR 187 (1969) 956-959
- [6] BROWDER, F.E. : Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type in: Contributions to nonlinear functional analysis , ed. by E. Zarantonello
Academic Press , New York - London 1971
- [7] - : The Lefschetz fixed point theorem and asymptotic fixed point theorems in: Partial differential equations and related topics , ed. by J.A. Goldstein
Springer-Verlag , Berlin - Heidelberg 1975
- [8] CALVERT, B. : The local fixed point index for multivalued transformations in Banach spaces
Math. Ann. 190 (1970) , 119-128
- [9] CELLINA, A. : A theorem on the approximation of compact multi-valued mappings
Lencei Rend. 47 (1969) , 429-433
- [10] - , LASOTA, A. : A new approach to the definition of topological degree for multi-valued mappings
ibid. , 434-440

- [11] DEIMLING, K. : Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade
Springer-Verlag , Berlin-Heidelberg-New-York 1974
- [12] DELEANU, A. : Théorie des point fixes: Commutativité de l'indice total
Bull.Soc.Math. France 91 (1963) , 285-288
- [13] DRESHER, M./KARLIN, S. : Solutions of convex games as fixed points , in: Contributions to the theory of games, Ann.of Math. studies 28 (1953)
- [14] DUGUNDJI, J. : Topology
Allyn and Bacon , Boston 1966
- [15] EILENBERG, S./MONTGOMERY, D. : Fixed point theorems for multivalued transformations
Am.J.Math. 68 (1946) , 214-222
- [16] EGGLESTON, H.G. : Convexity
Cambridge University Press 1958
- [17] EHRLICH, M. : Fixpunkt- und Fortsetzungssätze für mehrwertige Abbildungen in topologischen Vektorräumen
erscheint demnächst
- [18] FAN, Ky : A generalization of Tychonoff's fixed point theorem
Math.Ann. 142 (1961) , 305-310
- [19] FENSKE, C.C./PEITGEN, H.O. : Attractors and the fixed point index for a class of multivalued mappings
preprint Universität Bonn
- [20] - / - : Repulsive fixed points of multivalued transformations and the fixed point index
Math.Ann. 218 (1975) , 9-18
- [21] FILIPPOV, A.F. : Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side
SIAM J.Control 5 (1967) , 609-621
- [22] FOURNIER, G./PEITGEN, H.O. : On some fixed point principles for cones in linear normed spaces
preprint 86 , Universität Bonn

- [23] GEL'MAN, B.D. : A generalization of Kakutani's fixed point theorem to many-valued mappings
Soviet Math. Dokl. 14 (1973) , 305-308
- [24] - : Mehrwertige Integraloperatoren und ω -periodische Lösungen (russ.)
Trudy Mat. Fak. Voronež 1971 , 35-44
- [25] GÖRNIWICZ, L. : Homological methods in fixed point theory of multivalued maps
Rozprawy Math. 129 , Warszawa 1976
- [26] - /GRANAS, A. : Fixed point theorems for multivalued mappings of ANR's
Jour. Math. pures et appl. 49 (1970) , 381-395
- [27] GRANAS, A. : The Leray-Schauder Index and the fixed point theory for arbitrary ANR's
Bull. Soc. Math. France 100 (1972) , 209-228
- [28] - : Sur la notion de degré topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans l'espace de Banach
Bull. Acad. Pol. Sci. 7 (1959) , 191-194
- [29] - : Theorems on antipodes and theorems on fixed points for a certain class of multivalued mappings in Banach spaces
ibid.
- [30] HAHN, S./RIEDRICH, T. : Der Abbildungsgrad für kompakte Vektorfelder in nicht notwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen
Wiss. Z. der TU Dresden 22 (1973) , 37-42
- [31] HERMES, H. : The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$
Advances in Math. 4 (1970) , 149-169
- [32] HUKUHARA, M. : Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe
Funkcial. Ekv. 10 (1967) , 43-66

- [33] JONES, G.S. : On critical sets for nonlinear equations with nonuniqueness
Proc. Symp. Pure Math. 18.1 (1970) , 132-137
- [34] KAKUTANI, S. : A generalization of Brouwer's fixed point theorem
Duke Math. J. 8 (1941) , 457-549
- [35] KLEE, V.L. : Leray-Schauder Theory without local convexity
Math. Ann. 141 (1960) , 286-296
- [36] KÖTHE, G. : Topologische Lineare Räume
Springer-Verlag , Berlin-Heidelberg-New-York 1966
- [36a] KRASNOSEL'SKIJ, M.A./SABREIKO, P.P. : Geometrische Methoden der nichtlinearen Analysis (russ.)
Verlag "Die Wissenschaft" , Moskau 1975
- [37] LASRY, J.M./ROBERT, R. : Analyse non linéaire multivoque
U.E.R. Mathématiques de la décision
Université de Paris-Dauphine, 1976
- [38] MA, T.W. : Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces
Rozprawy Mat. 92 , Warszawa 1972
- [39] MARTELLI, M. : A Rothe's type theorem for non-compact acyclic-valued maps
Ber. GMD 103 (1975) , 64-66
- [40] MICHAEL, E. : Continuous Selections I
Ann. Math. 63 (1956) , 361-382
- [41] NAGUMO, M. : Degree of mapping in convex linear topological spaces
Am. J. Math. 73 (1951) , 497-511
- [42] NEUMANN, J. von : Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes
Erg. eines Math. Koll. 8 (1937) , 73-83

- [43] NUSSBAUM, R. : Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations II
J.Diff.Equ. 14 (1973) , 360-394
- [44] OBUCHOVSKIJ, B.B. : Zur Frage periodischer Lösungen von Differentialgleichungen mit mehrwertiger rechter Seite (russ.)
Trudy Mat.Fak.Voronež 10 (1973), 74-82
- [45] - /GOROCHOV, E.V. : Zur Definition der Rotation einer Klasse kompakt einschränkbarer mehrwertiger Operatoren (russ.)
Trudy Mat.Fak.Voronež 1974 , 45-54
- [46] PEITGEN, H.O. : On the Lefschetz number for iterates of continuous mappings
Proc.A.M.S. 54 (1976) , 441-444
- [47] PETRYSHYN, W.V./FITZPATRICK, P.M. : A degree theory, fixed point theorems, and mappings theorems for multivalued noncompact mappings
Trans.A.M.S. 194 (1974) , 1-24
- [48] - / - : Fixed point theorems and fixed point index for multivalued mappings in cones
J.London Math.Soc. 12 (1975) , 75-85
- [49] POWERS, M.J. : Lefschetz fixed point theorems for a new class of multivalued maps
Pac.J.Math. 42 (1972) , 211-220
- [50] PONOMAREV, V.I. : A new space of closed sets and multivalued continuous mappings of bicomacta
A.M.S. Transl. 88 (1964) , 95-118
- [51] - : Properties of topological spaces preserved under multivalued continuous mappings
ibid. 119-140
- [52] STEINLEIN, H. : Ein Satz über den Leray-Schauder'schen Abbildungsgrad
Math.Z. 126 (1972) , 176-208

- [52a] - : Fixpunktsätze für mengenwertige Abbildungen
unveröffentlichtes Manuscript
- [53] VIETORIS, L. : Über den höheren Zusammenhang kompakter
Räume und eine Klasse zusammenhangstreuer Abbildungen
Math. Ann. 97 (1927) , 454-472
- [54] LASOTA, A./OPIAL, Z. : Fixed point theorems for multi-
valued mappings and optimal control problems
Bull. Acad. Pol. Sci. 16 (1968) , 645-649
- [55] ZEIDLER, E. : Existenz, Eindeutigkeit, Eigenschaften
und Anwendungen des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$, in:
Theory of nonlinear operators, proceedings of a summer
school held in october 1972 at Neuendorf, pp.259-312
Akademie-Verlag , Berlin 1974

Lebenslauf

Am 8. Februar 1948 wurde ich als zweites Kind des Richters Konstantin v. Guretzky und der praktischen Ärztin Dorothea v. Guretzky in Potsdam geboren. Nach dem Umzug 1950 nach Berlin besuchte ich von 1954 bis 1968 die Schule. Die Reifeprüfung legte ich am 23. 2. 1968 an der Lilienthal-Oberschule ab.

Anschließend studierte ich mit Beginn des Sommersemesters 1968 an der Freien Universität Berlin Mathematik und Physik und bestand dort am 11.7. 1973 die Diplomprüfung.

Vom 1. 6. 1974 bis zum 30.9. 1975 war ich bei der Firma Siemens in München und Berlin als Systemberater angestellt. Anschließend arbeitete ich als Dozent an der Technischen Fachhochschule Berlin.

Seit dem 30.5. 75 bin ich mit der Germanistin Ulrike Loewe verheiratet.

